12. cvičení z M1110, podzim 2021

Příklad. 1. Najděte předpis pro složené zobrazení $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(\psi \circ \varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dvou lineárních zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadaných na vektorech bází takto:

$$\varphi(1,0,1) = (4,1),\ \varphi(1,1,2) = (9,1),\ \varphi(1,-1,2) = (5,3)$$
$$\psi(1,2) = (4,3,11),\ \psi(2,3) = (7,4,18).$$

Uměli byste bez počítání zjistit, zda je složené zobrazení lineární izomorfismus?

Řešení. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ □

Příklad. 2. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad. 3. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

Příklad. 4. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix}.$$

Příklad. 5. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x + a_n \end{pmatrix}.$$

Příklad. 6. Vypočtěte determinant

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 + x & x & x & \dots & x & x \\ x & a_2 + x & x & \dots & x & x \\ x & x & a_3 + x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí řádkových úprav a Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah mezi $D(a_1, a_2. \dots, a_n)$ a $D(a_2, a_3, \dots, a_n)$. □

Příklad. 7. Vypočtěte determinant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah. □

Příklad. 8. Vypočtěte determinant matice $2n \times 2n$

$$D_{2n} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \dots & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah. □

Příklad. 9. Vypočtěte determinant matice $n \times n$

$$D_n = \det \begin{pmatrix} x+2y & x & x & \dots & x & x-y \\ x-y & x+2y & x & \dots & x & x \\ x & x-y & x+2y & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+2y & x \\ x & x & x & \dots & x-y & x+2y \end{pmatrix}.$$

Příklad. 10. Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 11. Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici tvaru $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 12. Vypočtěte determinant matice $n \times n$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 & 5 & 6 & \dots & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $(-1)^{n-1}\frac{1}{2}n^{n-1}(n+1)$ □