

### 13. cvičení z M1110, podzim 2021

Dokončete některé úlohy (není nutné všechny) na determinanty z minulého cvičení.

**Příklad 1.** Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 2.** Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici tvaru  $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 3.** Necht'  $U$  je množina všech matic  $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , jejichž řádky jsou lineárně závislé. Zjistěte, zda je  $U$  vektorový podprostor ve vektorovém prostoru  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Bod pouze za zdůvodnění.

**Příklad 4.** Uvažujme lineární zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}^{50} \rightarrow \text{Mat}_{7 \times 7}(\mathbb{R})$  a  $\psi : \text{Mat}_{7 \times 7}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{60}$ . Může být složené zobrazení  $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^{50} \rightarrow \mathbb{R}^{60}$  prosté? Bod pouze za zdůvodnění správné odpovědi.

**Příklad 5.** Napište předpis lineárního zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}^{20} \rightarrow \mathbb{R}_9[x]$

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_{20}) = \dots$$

takového, že  $\dim \text{im } \varphi = 5$  a  $\varphi(1, 0, 1, 0, 1, \dots, 1, 0) = x^5$ . Napište rovněž bázi obrazu.

**Příklad 6.** V prostoru  $\mathbb{R}_1[x]$  uvažujme báze  $\alpha = (p_1, p_2)$  a  $\beta = (q_1, q_2)$ . Najděte polynomy  $q_1$  a  $q_2$ , jestliže  $p_1(x) = 1 - 2x$  a  $q_2(x) = 3 - 2x$  a matice přechodu je

$$(\text{id})_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 7.** Platí pro každé dvě reálné čtvercové matice  $A, B$  tvaru  $n \times n$  rovnost

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

Svou odpověď zdůvodněte.

**Příklad. 8.** Ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^2$  udejte příklad bází  $\alpha, \beta$  takových, že matice přechodu je

$$(\text{id})_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

nebo dokažte, že neexistují.

**Příklad. 9.** Nalezněte bázi  $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$  vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$  takovou, že souřadnice vektoru  $v = (1, 0, 0)$  v bázi  $\alpha$  jsou  $(1, 1, 1)^T$  a souřadnice vektoru  $z = (1, 1, 1)$  v bázi  $\alpha$  jsou  $(1, 0, 0)^T$ . Svou volbu zdůvodněte z definice souřadnic.