

2. cvičení z M1110, podzim 2021

Příklad 1. Zjistěte, zda jde matice násobit, a pokud ano, vynásobte je.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$
$$(2 \ 8 \ 3 \ 21 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 8 \ 3 \ 21 \ 5)$$

Příklad 2. Napište nějaké matice tvaru 5×4 a 4×3 a vynásobte je.

Příklad 3. Necht' $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočtěte $A^2 = A \cdot A$ a $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

Příklad 4. Vynásobte následující dvě matice a výsledek vyčíslete s použitím součtových vzorců pro goniometrické funkce

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{pmatrix}.$$

Na základě toho ukažte, že zobrazení

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

je otočení kolem počátku v rovině o úhel α .

Příklad 5. Vypočtěte B^n , jestliže $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Návod: Dokažte indukci, že $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 6. Vypočtěte $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n$.

Návod: Spočtěte si C^2 , C^3 a C^4 . Pomocí toho si udělejte hypotézu, čemu se rovná C^n , a tu dokažte indukci.

Příklad 7. Pro všechny elementární řádkové operace op na maticích o k řádcích platí

$$op(E_k) \cdot A = op(A),$$

kde symbol $\text{op}(A)$ znamená provedení operace na matici A tvaru $k \times n$ a E_k je jednotková matice tvaru $k \times k$. Ukažte pro konkrétní matice A .

Příklad. 8. Matice A a B tvaru $n \times n$ jsou dány předpisem:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \geq j, \\ 2, & \text{if } i < j, \end{cases} \quad B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq j, \\ 3, & \text{if } i > j. \end{cases}$$

Vypočtěte, čemu se rovná jejich součin.

Návod: Napište si tyto matice například pro $n = 6$. Zkuste si provést jejich násobení. Pro obecné n spočtěte $(A \cdot B)_{ij}$ zvlášť pro $i \leq j$ a pro $i \geq j$.