

## 5. cvičení z M1110, podzim 2022

**Příklad 1.** Rozhodněte, zda následující podmnožiny vektorového podprostoru  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  všech funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  jsou vektorové podprostory.

- (a)  $U = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(|x|) = 0\}$ ,
- (b)  $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall c \in \mathbb{Z} : f(c) \cdot f(-c) = 0\}$ ,
- (c)  $W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall s, t \in \mathbb{R} : s \leq t \Rightarrow f(s) \geq f(t)\}$ ,
- (d)  $X = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq n|x|\}$ .

**Příklad 2.** Uvažujme v  $\mathbb{R}^5$  vektory  $v_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (2, -1, 0, 1, 1)$ ,  $v_3 = (1, -3, -1, 1, 0)$  a  $u = (1, 7, 3, -1, 2)$ . Zjistěte, zda vektor  $u$  leží v lineárním obalu  $[v_1, v_2, v_3]$ .

**Příklad 3.** V prostoru  $\mathbb{R}_3[x]$  zjistěte, zda polynom  $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$  leží v lineárním obalu

$$[1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3].$$

Pokud ano, napište ho jako konkrétní lineární kombinaci daných polynomů.

*Řešení.*  $(-10, 2, 7, 1)$

□

**Příklad 4.** Podprostor  $U$  v  $\mathbb{R}^5$  je množinou všech řešení homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Napište jej jako lineární obal několika vektorů.

**Příklad 5.** Rozhodněte, zda platí:

- (a)  $[(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)] = \mathbb{R}^4$ ,
- (b)  $[(1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)] = \mathbb{R}^5$ .

**Příklad 6.** Necht'  $U$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$  a necht'  $u, v, w \in U$ . Dokažte rovnost lineárních obalů

$$[u, v, w, 2u - 3v + 10w] = [u, v, w] = [u, v, 2u - 3v + 10w].$$

**Příklad 7.** Zjistěte, zda jsou vektory  $v_1 = (1, -1, 0, 2)$ ,  $v_2 = (2, 2, -1, 3)$ ,  $v_3 = (0, 1, 1, 0)$  a  $v_4 = (3, 2, 0, 5)$  ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^4$  lineárně závislé nebo nezávislé.

**Příklad 8.** Zjistěte, zda jsou polynomy  $x^2 + x + 1$ ,  $2x^2 + 2$ ,  $x^2 - x$  ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}_2[x]$  lineárně závislé nebo nezávislé.