

11. cvičení z M1110, podzim 2022

Příklad. 1. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad. 2. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

Příklad. 3. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix}.$$

Příklad. 4. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x + a_n \end{pmatrix}.$$

Návod. K 1. sloupci přičtete další sloupce a pak od řádků 2, 3, až n odečtete 1. řádek. \square

Příklad. 5. Vypočtěte determinant

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 + x & x & x & \dots & x & x \\ x & a_2 + x & x & \dots & x & x \\ x & x & a_3 + x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí řádkových úprav a Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah mezi $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $D(a_2, a_3, \dots, a_n)$. \square

Příklad. 6. Vypočtěte determinant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah. □

Příklad. 7. Vypočtěte determinant matice $2n \times 2n$

$$D_{2n} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \dots & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah. □

Příklad. 8. Vypočtěte determinant matice $n \times n$

$$D_n = \det \begin{pmatrix} x+2y & x & x & \dots & x & x-y \\ x-y & x+2y & x & \dots & x & x \\ x & x-y & x+2y & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+2y & x \\ x & x & x & \dots & x-y & x+2y \end{pmatrix}.$$

Příklad. 9. Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$