

4. cvičení z M1110 – komplexní čísla a vektorové prostory, podzim 2023

Před počítáním úloh zopakujte (naučte studenty) počítání s komplexními čísly (sčítání, násobení, komplexně sdružené číslo, absolutní hodnota, převrácené číslo k danému číslu.) Stačí 20 minut. Více uděláme v semináři z matematiky.

Příklad 1. Zopakujte axiomy vektorového prostoru nad tělesem \mathbb{R} nebo \mathbb{C} a demonstруйте je na \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n .

Příklad 2. Ukažte, že následující množiny lze opatřit vhodnou operací sčítání a násobení skalárem tak, aby se s těmito operacemi staly vektorovými prostory nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} .

- (a) Množina $\mathbb{R}[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty.
- (b) Množina $\mathbb{C}[x]$ všech polynomů s komplexními koeficienty.
- (c) Množina $\text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$ matic tvaru $k \times n$ s reálnými čísly.
- (d) Množina $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$ všech posloupností reálných čísel.
- (e) Množina $\{f : M \rightarrow \mathbb{C}\}$ všech zobrazení nějaké neprázdné množiny M do komplexních čísel.

Příklad 3. Ukažte, že množiny

- (a) $U = \mathbb{R}^2$ s operacemi

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad a \odot (x_1, x_2) = (ax_1, x_2),$$

- (b) $V = \mathbb{R}^2$ s operacemi

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 3, x_2 + y_2), \quad a \odot (x_1, x_2) = (ax_1, ax_2),$$

nejsou vektorové prostory nad \mathbb{R} . Zjistěte, které axiomy vektorového prostoru jsou splněny a které nikoliv.

Příklad 4. Ukažte, že množina

$$U = (0, \infty)$$

společně s operacemi

$$x \oplus y = xy, \quad a \odot x = x^a$$

tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .