

5. cvičení z M1110 – lineární obal a vektorové podprostory, podzim 2023

Lze vynechat příklady 6, 8b a 9.

Příklad 1. Zopakujte si definici lineární kombinace vektorů a lineárního obalu konečné množiny vektorů. Představme si vektorový prostor \mathbb{R}^2 nad \mathbb{R} geometricky jako rovinu s počátkem (to je nulový vektor). Najděte podle definice

- (a) Lineární obal jediného nenulového vektoru.
- (b) Lineární obal nulového vektoru.
- (c) Lineární obal dvou vektorů, které neleží v jedné přímce procházející počátkem.

Popište lineární obaly geometricky. Co je lineární obal dvou vektorů v prostoru \mathbb{R}^3 ?

Příklad 2. Zopakujte si definici vektorového podprostoru. Najděte všechny vektorové podprostory ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^2 . Postupujte "geometricky" s využitím definice a předchozí úlohy.

Příklad 3. Dokažte podle definice, že

- (a) Každý lineární obal je vektorový podprostor.
- (b) Množina řešení homogenní soustavy rovnic $Ax = 0$ s maticí A tvaru $n \times k$ je vektorový podprostor.

Příklad 4. Rozhodněte, zda následující podmnožiny vektorových prostorů jsou vektorové podprostory.

- (a) $V = \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,
- (b) $Z = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Příklad 5. Uvažujme v \mathbb{R}^5 vektory

$$v_1 = (1, 2, 1, 0, 1), \quad v_2 = (2, -1, 0, 1, 1), \quad v_3 = (1, -3, -1, 1, 0), \quad u = (1, 7, 3, -1, 2),$$

Zjistěte, zda vektor u leží v lineárním obalu $[v_1, v_2, v_3]$.

Příklad 6. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ zjistěte, zda polynom $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ leží v lineárním obalu

$$[1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3].$$

Pokud ano, napište ho jako konkrétní lineární kombinaci daných polynomů.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$

□

Příklad 7. Podprostor U v \mathbb{R}^5 je množinou všech řešení homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Napište jej jako lineární obal několika vektorů.

Příklad 8. Rozhodněte, zda platí:

$$(a) [(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)] = \mathbb{R}^4,$$

$$(b) [(1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)] = \mathbb{R}^5.$$

Příklad. 9. Necht' U je vektorový prostor nad \mathbb{K} a necht' $u, v, w \in U$. Dokažte rovnost lineárních obalů

$$[u, v, w, 2u - 3v + 10w] = [u, v, w] = [u, v, 2u - 3v + 10w].$$