

## 6. cvičení z M1110 – lineární nezávislost a báze, podzim 2023

**Příklad 1.** Zopakujte si defini lineární nezávislosti vektorů. Podle definice zjistěte nejdříve v  $\mathbb{R}^2$  a potom v libovolné prostoru zjistěte:

- Kdy jsou lineárně nezávislé dva vektory. Co to znamená geometricky?
- Kdy je lineárně nezávislý jeden vektor?
- Co geometricky znamená, že jsou tři vektory lineárně závislé a co znamená, že jsou nezávislé.

**Příklad 2.** Zjistěte, zda jsou vektory  $v_1 = (1, -1, 0, 2)$ ,  $v_2 = (2, 2, -1, 3)$ ,  $v_3 = (0, 1, 1, 0)$  a  $v_4 = (3, 2, 0, 5)$  ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^4$  lineárně závislé nebo nezávislé.

**Příklad 3.** Zjistěte, zda jsou polynomy  $x^2 + x + 1$ ,  $2x^2 + 2$ ,  $x^2 - x$  ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}_2[x]$  lineárně závislé nebo nezávislé.

**Příklad 4\*.** Zjistěte, zda jsou následující funkce ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  lineárně závislé nebo nezávislé:

- $x^2, |x|, \sqrt{|x|}$ ,
- $(\sqrt{x^2 + 1})^2, (\sqrt{x^2 - 1})^2, x^2 + 1$ ,
- $\sin x, \cos x, \sin 2x$ .

**Příklad 5.** S použitím algoritmu z přednášky vyberte z vektorů  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \in \mathbb{R}^4$  lineárně nezávislé se stejným lineárním obalem.

$$u_1 = (1, 2, 3, -1), u_2 = (-1, 3, 2, 4), u_3 = (1, 1, 4, -6), u_4 = (3, 5, 10, -8), u_5 = (1, 1, 1, 1).$$

**Příklad 6.** Napište dvě různé báze vektorového prostoru  $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  všech reálných matic tvaru  $3 \times 3$ . Dále najděte báze podprostorů:

- $U \subseteq \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  všech symetrických matic,
- $V \subseteq \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  všech antisymetrických matic,
- $W \subseteq \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  všech matic s nulovou stopou.

**Příklad 7.** Najděte bázi podprostoru  $M \subseteq \mathbb{R}^5$  všech řešení homogenní soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

a doplňte ji do báze celého prostoru  $\mathbb{R}^5$ .

**Příklad 8.** Najděte báze podprostorů prostoru  $\mathbb{R}_3[x]$ :

- $K = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(-x) = -p(x), p(1) = 0\}$ ,
- $L = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) - 2xp'(x) = 0\}$ , kde  $p'$  značí derivace polynomu  $p$ .

**Příklad. 9.** Dokažte z definice báze: Je-li  $u_1, u_2, u_3, u_4$  báze prostoru  $U$ , pak  $u_1 + u_4, u_3, u_2 + u_3 + u_4, u_1 + 2u_3$  je rovněž báze prostoru  $U$ .

**Příklad. 10\*.** Necht'  $U$  je vektorový prostor všech nekonečných posloupností reálných čísel. Ukažte, že jeho podprostor

$$F = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in U : a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 2\}$$

má bázi tvořenou dvěma vektory.

Dále se pokuste ukázat, že celý prostor nemá bázi tvořenou konečným seznamem vektorů.