

## 7. cvičení z M1110 – Průniky a součty podprostorů, podzim 2023

**Příklad 1.** Spočítejte souřadnice polynomu  $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$  v bázi

$$\alpha = (1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3)$$

prostoru  $\mathbb{R}_3[x]$ .

*Řešení.*  $(-10, 2, 7, 1)$  □

**Příklad 2.** Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů  $P$  a  $Q$  v  $\mathbb{R}^4$ , jestliže

$$P = [(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)],$$

$$Q = [(1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0)].$$

*Řešení.* Průnik má dimenzi 2 a bázi např.  $(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)$ . □

**Příklad 3.** Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů  $K$  a  $L$  v  $\mathbb{R}^4$ , jestliže

$$K = [(1, 2, 0, 3), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 1, 1)],$$

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

*Návod.* Průnik najděte přímo, bez hledání báze podprostoru  $L$ . Součet najděte pomocí formule pro dimenze. □

**Příklad 4.** Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(1) = 0, f(2) = 0\} \quad \text{a} \quad Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] \mid g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

*Řešení.*  $\dim P = 3, \dim Q = 3, \dim P \cap Q = 1, \dim P + Q = 5$ , tedy  $P + Q = \mathbb{R}_4[x]$ . □

**Příklad 5.** Necht'  $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$  je báze prostoru  $U$ . Souřadnice vektoru  $v \in U$  v této bázi jsou

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Najděte souřadnice vektoru  $v$  v bázi  $\beta = (u_3, u_1 + 2u_2, u_1 - u_2 + 2u_3)$ .

**Příklad 6.** Najděte báze a dimenze následujících vektorových prostorů:

- (1)  $U = \{A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R}); A \text{ je antisymetická matice}\}$  nad  $\mathbb{R}$ ,
- (2)  $\mathbb{C}_2[x]$  jako vektorového prostoru nad  $\mathbb{R}$ ,
- (3)  $\mathbb{R}^M$  nad  $\mathbb{R}$ , kde  $M$  je konečná množina.

**Příklad 7.\*** (Vracíme se k příkladu 10 z předchozího cvičení.) Ukažte, že vektorový prostor  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  všech posloupností reálných čísel nemá nad  $\mathbb{R}$  konečnou dimenzi. Zjistěte prvně, jak je to s dimenzí vektorového podprostoru

$$W = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} \forall i \geq n : f(i) = 0\}.$$