

8. cvičení z M1110 – lineární zobrazení, podzim 2023

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární.

- (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1x_2$,
- (b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2)$,
- (c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(p) = (p(1), p(2)^2)$,
- (d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(p) = (p(1), p(2))$.

Příklad 2. Ukažte, že každá reálná matice A tvaru $k \times n$ zadává lineární zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Platí i obrácené tvrzení, každé lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k lze psát pomocí násobení maticí tak, jak je uvedeno výše.

Příklad 3. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 uvažujme bázi $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$. Necht' $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_1, \varphi(u_2) = u_3, \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Příklad 4. Necht' φ je zobrazení \mathbb{R}^3 do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

Příklad 5. Najděte bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaného předpisem

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Najděte nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takové, že

$$\ker f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{a} \quad \text{im } f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Příklad 7. Necht' je lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadáno svými hodnotami na vektorech báze prostoru \mathbb{R}^4 .

$$\begin{aligned} \varphi(1, 2, 2, 2) &= (1, -5, 4), \quad \varphi(0, 1, 2, 2) = (1, 2, -3), \quad \varphi(0, 0, 1, 2) = (2, -3, 1), \\ \varphi(0, 0, 0, 1) &= (-3, 1, 2). \end{aligned}$$

Najděte bázi jeho jádra a obrazu.

Příklad. 8. Napište konkrétní předpis lineárního zobrazení $F : \mathbb{R}_{100}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{50}$ takového, že $\dim \ker F = 70$.

Příklad. 9*. Necht' $\varphi : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení a $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in V$ lineárně nezávislé, pak jsou rovněž $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ lineárně nezávislé.