

11. cvičení z M1110 – matice přechodu, podzim 2023

Příklad 1. Spočítejte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Příklad 2. Spočítejte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku proveďte aspoň částečně.

Řešení. Inverzní matice je

$$\begin{pmatrix} 154 & -179 & -205 & 235 \\ -36 & 42 & 48 & -55 \\ 6 & -7 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 3. Spočítejte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Příklad 4. Spočítejte inverzní matici k matici tvaru $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Návod. K 1. řádku přičtěte ostatní řádky.

□

Příklad 5. Najděte matici přechodu $(\text{id})_{\beta,\alpha}$ mezi bázemi $\alpha = (x^2 + x + 1, x + 2, x^2 - x)$ a $\beta = (x^2 + 2, x^2 - x - 1, x + 1)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Spočítejte ji prvně přímo z definice a potom pomocí matic přechodu $(\text{id})_{\varepsilon,\alpha}$ a $(\text{id})_{\varepsilon,\beta}$, kde $\varepsilon = (x^2, x, 1)$.

Uvědomte si na tomto příkladě, že s maticemi přechodu se počítá jinak s bázemi a jinak se souřadnicemi. S bázemi zapisovanými do řádku takto:

$$\alpha = \beta(\text{id})_{\beta,\alpha},$$

ale se souřadnicemi vektorů takto:

$$(u)_\beta = (\text{id})_{\beta,\alpha}(u)_\alpha.$$

Napište analogické vztahy pro matice obecných lineárních zobrazení.

Příklad 6. Na některém z předchozích cvičení jsme hledali matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadaného předpisem

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bázích $\alpha = ((1, 0, 1)^T, (1, 1, 2)^T, (1, -1, 2)^T)$ a $\beta = ((1, 2)^T, (2, 3)^T)$. Tentokrát ji spočítejte pomocí “vzorečku” s maticemi přechodu, kde se vyskytují standardní báze \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2 .

Příklad 7. Najděte předpis pro složené zobrazení $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\psi \circ \varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dvou lineárních zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaných na vektorech bází takto:

$$\begin{aligned} \varphi(1, 0, 1) &= (4, 1), \quad \varphi(1, 1, 2) = (9, 1), \quad \varphi(1, -1, 2) = (5, 3) \\ \psi(1, 2) &= (4, 3, 11), \quad \psi(2, 3) = (7, 4, 18). \end{aligned}$$

Uměli byste bez počítání zjistit, zda je složené zobrazení lineární izomorfismus?

Řešení. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

□