

## 12. cvičení z M1110 – determinanty, podzim 2023

**Příklad 1.** Najděte předpis pro složené zobrazení  $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\psi \circ \varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dvou lineárních zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadaných na vektorech bází takto:

$$\varphi(1, 0, 1) = (4, 1), \quad \varphi(1, 1, 2) = (9, 1), \quad \varphi(1, -1, 2) = (5, 3)$$

$$\psi(1, 2) = (4, 3, 11), \quad \psi(2, 3) = (7, 4, 18).$$

Uměli byste bez počítání zjistit, zda je složené zobrazení lineární izomorfismus?

*Řešení.*  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

□

**Příklad 2.** Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Příklad 3.** Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

**Příklad 4.** Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix}.$$

**Příklad 5.** Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x + a_n \end{pmatrix}.$$

**Příklad. 6.** Vypočtěte determinant

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 + x & x & x & \dots & x & x \\ x & a_2 + x & x & \dots & x & x \\ x & x & a_3 + x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x & a_n + x \end{pmatrix}.$$

*Návod.* Pomocí řádkových úprav a Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah mezi  $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$  a  $D(a_2, a_3, \dots, a_n)$ .  $\square$

**Příklad. 7.** Vypočtěte determinant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

*Návod.* Pomocí Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah.  $\square$

**Příklad. 8.** Vypočtěte determinant matice  $2n \times 2n$

$$D_{2n} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \dots & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

*Návod.* Pomocí Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah.  $\square$

**Příklad. 9.** Vypočtěte determinant matice  $n \times n$

$$D_n = \det \begin{pmatrix} x+2y & x & x & \dots & x & x-y \\ x-y & x+2y & x & \dots & x & x \\ x & x-y & x+2y & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+2y & x \\ x & x & x & \dots & x-y & x+2y \end{pmatrix}.$$