13. cvičení z M1110 – dokončení determinantů, teoretické úlohy, podzim 2023

Dokončete některé úlohy (není nutné všechny) na determinanty z minulého cvičení.

Příklad. 1. Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 2. Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici tvaru $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 3. Nechť U je množina všech matic $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, jejichž řádky jsou lineárně závislé. Zjistěte, zda je U vektorový podprostor ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ Bod pouze za zdůvodnění.

Příklad. 4. Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^{50} \to \mathrm{Mat}_{7\times 7}(\mathbb{R})$ a $\psi : \mathrm{Mat}_{7\times 7}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{60}$. Může být složené zobrazení $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^{50} \to \mathbb{R}^{60}$ prosté? Bod pouze za zdůvodnění správné odpovědi.

Příklad. 5. Napište předpis lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}_9[x]$

$$\varphi(a_1, a_2, ..., a_{20}) = \dots$$

takového, že $\dim \operatorname{im} \varphi = 5$ a $\varphi(1, 0, 1, 0, 1, ..., 1, 0) = x^5$. Napište rovněž bázi obrazu.

Příklad. 6. V prostoru $\mathbb{R}_1[x]$ uvažujme báze $\alpha = (p_1, p_2)$ a $\beta = (q_1, q_2)$. Najděte polynomy q_1 a p_2 , jestliže $p_1(x) = 1 - 2x$ a $q_2(x) = 3 - 2x$ a matice přechodu je

$$(\mathrm{id})_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 7. Platí pro každé dvě reálné čtvercové matice A, B tvaru $n \times n$ rovnost

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

Svou odpověď zdůvodněte.

Příklad. 8. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ udejte příklad bází α, β takových, že matice přechodu je

$$(\mathrm{id})_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

nebo dokažte, že neexistují.

Příklad. 9. Nalezněte bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ takovou, že souřadnice vektoru $v = (1, 0, 0)$ v bázi α jsou $(1, 1, 1)^T$ a souřadnice vektoru $z = (1, 1, 1)$ v bázi α jsou $(1, 0, 0)^T$. Svou volbu zdůvodněte z definice souřadnic.