3. přednáška INVERZNÍ MATICE

Zopakujme si definici: Inverzní matice k matici A typu $n \times n$ je matice B (opět typu $n\times n$) taková, že
$$A \cdot B = B \cdot A = E,$$
kde E je jednotková matice typu $n \times n$.

<u>Lemma</u> K dané čtvercové matici A existuje nejvýše jedna inverzní matice.

<u>Důkaz:</u> Nechť matice B i C jsou inverzní k A, tj. platí:
$$A \cdot B = B \cdot A = E$$
$$A \cdot C = C \cdot A = E$$
Vezmeme rovnici $A \cdot B = E$ a vynásobme ji zleva maticí C:
$$C(A \cdot B) = C \cdot E$$
$$\underbrace{(C \cdot A)}_{E} \cdot B = C$$
$$E \cdot B = C$$
$$B = C,$$
což jsme chtěli dokázat. ■

Jestliže k matici A existuje inverzní matice, značíme ji symbolem A^{-1}.

<u>Lemma</u> Jestliže matice A i B, obě typu $n \times n$, mají inverzní matice A^{-1}, resp. B^{-1}, pak má inverzní matici i jejich součin $A \cdot B$ a platí
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

<u>Důkaz:</u> Stačí počítat
$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = (A\, E)A^{-1} = A\, A^{-1} = E$$

Analogicky ukážeme, že $(B^{-1}\cdot A^{-1})(AB) = E$. $\square$

K výpočtu inverzní matice budeme používat elementární řádkové operace. Dejme tyto operace do souvislosti s násobením matic.

Označme e jednu elementární řádkovou operaci. Symbolem $e(A)$ budeme značit provedení této operace na matici A. Souvislost mezi řádkovými operacemi a násobením matic je popsána následujícím tvrzením:

Lemma: Nechť A je matice $k\times n$, E je jednotková matice $k\times k$ a e je elementární řádková operace. Potom platí

$$e(E)\cdot A = e(A).$$

Důkaz: Pro všechny typy element. řádkových operací to ukážeme na cvičení. Zde si vezmeme za e přičtení c-násobku prvního řádku ke 2. řádku:

$$e(E)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ ca_{11}+a_{21} & ca_{12}+a_{22} & ca_{13}+a_{23} & \dots & ca_{1n}+a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = e(A)$$

Matice $e(E)$ se nazývají elementární matice.
Předchozí lemma říká

„Elementární operace lze realizovat násobením elementárními maticemi zleva."

Lemma: Ke každé elementární matici existuje inverzní matice.

Důkaz: Proberme jednotlivé elementární operace.

(1) e = vynásobení 2. řádku číslem $c \neq 0$.

$$e(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Je jednoduché ukázat, že inverzní matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vynásobením zleva i zprava dostaneme jednotkovou matici.

(2) e je výměna 1. a 2. řádku. Inverze k $e(E)$ je opět $e(E)$. Lze to ukázat výpočtem nebo použitím předposledního lemmatu takto:

$e(E) \cdot e(E) = e(e(E)) = E$

neboť vyměníme-li dvakrát po sobě 1. a 2. řádek dostaneme původní matici.

(3) e je přičtení c-násobku 1. řádku ke 2. řádku

$$e(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní maticí je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \bar{e}(E),$$

kde $\bar{e}$ je přičtení $(-c)$-násobku 1. řádku k 2. řádku. O tom, že jde o inverzní matici se můžeme přesvědčit vynásobením nebo také použitím předchozího lemmatu.

$$\bar{e}(E) \cdot e(E) = \bar{e}(eE) = E,$$

neboť $\bar{e}e$ znamená, že k 2. řádku přičteme prvně c-násobek 1. řádku a pak c-násobek 1. řádku odečteme. Matice se nezmění. □

ALGORITHMUS PRO VÝPOČET INVERZNÍ MATICE

$(A \mid E) \xrightarrow{\text{EŘO}} (\tilde{A} \mid \tilde{B})$, kde $\tilde{A}$ je matice ve schodovitém tvaru

(1) V matici $\tilde{A}$ je nulový řádek, pak $\tilde{A}$ ani A nemají inverzní matici.

(2) Jestliže v $\tilde{A}$ není nulový řádek, tak protože jde o matici $n \times n$, musí být v každém řádku vedoucí koeficient. Proto lze pokračovat v provádění element. řádkových operací. Pomocí tzv.

úplné Gaussovy eliminace dostaneme

$$(\tilde{A} \mid \tilde{B}) \xrightarrow{E\check{R}O} (E \mid B)$$

Matice B je hledaná inverzní matice k matici A.

<u>Příklad</u>: Najděte inverzní matici ke matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Použití algoritmu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \quad\tilde{A} \qquad\quad \tilde{B} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

A má inverzi, můžeme pokračovat, provádíme úpravy zdola

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \\ \quad E \qquad\qquad B = A^{-1} \end{array}$$

Přesvědčíme se, že B je skutečně inverzní matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Důkaz algoritmu</u>

$$(A \mid E) \xrightarrow{E\check{R}O} (\tilde{A} \mid \tilde{B})$$

Provádíme elementární řádkové operace, proto

$$\tilde{A} = e_s(\dots(e_2(e_1(A)))\dots) = e_s(E)\cdot e_{s-1}(E)\dots e_2(E)\, e_1(E)\cdot A$$

Stejné operace provádíme na jednotkovou matici, proto

$$\tilde{B} = e_s(\dots(e_2(e_1(E))\dots) = e_s(E)\cdot e_{s-1}(E)\dots e_2(E)\, e_1(E)\cdot E$$

Označme element. matice $e_i(E) = P_i$
Obsahuje-li $\tilde{A}$ nulový řádek, pak $\tilde{A}$ nemá inverzní (neboť $\tilde{A} \cdot C$ obsahuje nulový řádek pro každou matici C). Jestliže $\tilde{A}$ nemá inverzní, nemá ji ani matice A.
Platí
$$\tilde{A} = P_s \cdot P_{s-1} \dots P_2 \cdot P_1 \cdot A = \tilde{B} \cdot A$$
Matice $\tilde{B}$ jako součin element. matic má inv. matici. Kdyby i A měla inverzní matici, pak by inverzi měl i součin $\tilde{B} \cdot A = \tilde{A}$. To ale není možné.

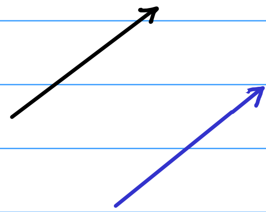
Předpokládejme, že $\tilde{A}$ nemá nulový řádek, pak lze pokračovat v element. řádk. operacích
$$(\tilde{A} \mid \tilde{B}) \xrightarrow{ERO} (E \mid B)$$
Platí
$$E = P_k P_{k-1} \dots P_{s+1} \tilde{A} = P_k P_{k-1} \dots P_{s+1} P_s \dots P_1 A$$
$$B = P_k P_{k-1} \dots P_{s+1} \tilde{B} = P_k P_{k-1} \dots P_{s+1} P_s \dots P_1$$
Porovnáním obou rovnic dostaneme
$$(*) \qquad E = P_k P_{k-1} \dots P_1 A = B \cdot A .$$
Z první části rovnice $(*)$ dostaneme
$$A = (P_k P_{k-1} \dots P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_{k-1}^{-1} P_k^{-1}$$
neboť součin $P_k P_{k-1} \dots P_1$ element. matic má inverzi. Nyní spočítáme
$$A \cdot B = (P_1^{-1} \cdot P_2^{-1} \dots P_k^{-1})(P_k P_{k-1} \dots P_2 P_1) =$$
$$= P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_{k-1}^{-1} \underbrace{(P_k^{-1} P_k)}_{E} P_{k-1} \dots P_2 P_1 =$$
$$= \dots\dots = P_1^{-1} P_1 = E$$

Takže jsme dokázali, že
$$B \cdot A = E \quad i \quad A \cdot B = E.$$
Proto je B hledaná inverzní matice.

Začínáme s teorií **VEKTOROVÉ PROSTORY**

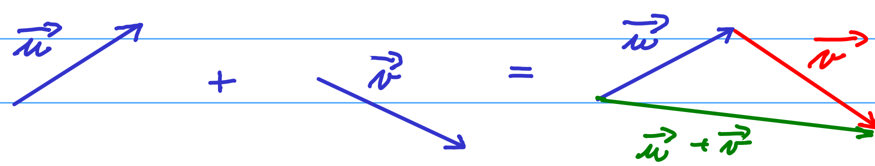
Doporučuji video Essence of linear algebra
Chapter 1, vcelku 10 min
na youtube (3 695 343 zhlédnutí do 19.10.2020)

Motivace: vektory ve fyzice, orientované dvojice bodů, které si představujeme jako „šipky".

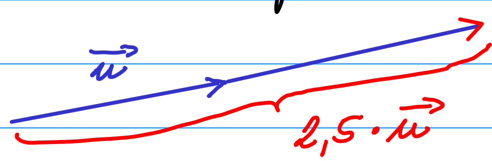


Určují stejný vektor (jeden vznikne z druhého posunutím)

Vektory lze sčítat



a násobit reálným číslem



Jiná představa vektorů

vektor = uspořádaná dvojice reálných čísel

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}48 \end{pmatrix}$ Dvojice čísel lze sčítat

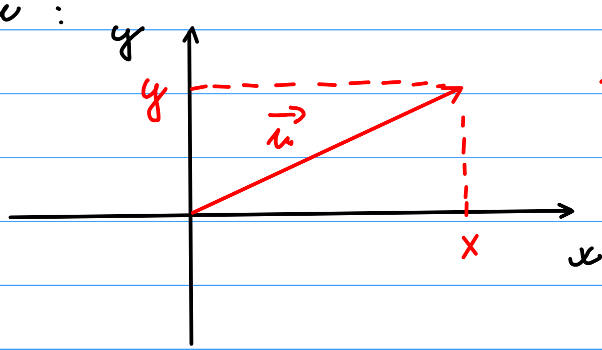
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

a rovněž násobit reálným číslem

$$c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c x_1 \\ c x_2 \end{pmatrix}$$

Mezi oběma představami je vzájemně jednoznačná korespondence:

Posuňme fyzikům vektor do počátku souřadného systému:



$$\vec{u} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Obráceně, ke dvojici $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ najdeme „šipku" začínající v bodě $[0,0]$ a končící v bodě $[x,y]$.

Matematici obě představy nahradili abstraktním pojmem vektorového prostoru = množiny všech vektorů. V definici je podstatné, že vektory můžeme sčítat a násobit čísly. Současně chceme, aby toto sčítání a násobení mělo stejné vlastnosti jako sčítání vektorů ve fyzice a fyzikální násobení vektorů číslem.
Vektor je pak prvek vektorového prostoru.

Definice VEKTOROVÝ PROSTOR

Neprázdná množina U je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), jestliže jsou zadány operace

sčítání vektorů $+ : U \times U \longrightarrow U$
(to je zobrazení, které dvěma vektorům $\vec{u}, \vec{v} \in U$ přiřazuje vektor $\vec{u} + \vec{v} \in U$)

a násobení vektoru číslem $\cdot : \mathbb{K} \times U \longrightarrow U$
(to je zobrazení, které číslu $c \in \mathbb{K}$ a vektoru $\vec{u} \in U$ přiřazuje vektor $c \cdot \vec{u} \in U$, skalární násobek)

a tyto dvě operace mají následující vlastnosti:

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U \quad \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (komutativita)

(2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in U \quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (asociativita)

(3) existuje nulový vektor $\vec{O} \in U$ takový, že
$$\forall \vec{u} \in U \quad \vec{u} + \vec{O} = \vec{u}$$

(4) ke každému vektoru $\vec{u} \in U$ existuje opačný vektor $(-\vec{u}) \in U$ takový, že
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{O}$$

(5) $\forall a, b \in \mathbb{K} \ \forall \vec{u} \in U \quad (a+b)\cdot\vec{u} = (a\cdot\vec{u}) + (b\cdot\vec{u})$

(6) $\forall a \in \mathbb{K} \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in U \quad a\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = (a\cdot\vec{u}) + (a\cdot\vec{v})$

(7) $\forall a, b \in \mathbb{K} \ \forall \vec{u} \in U \quad a\cdot(b\cdot\vec{u}) = (a\,b)\cdot\vec{u}$

(8) $\forall \vec{u} \in U \quad 1\cdot\vec{u} = \vec{u}$

Příklady Bez znalosti příkladů ústní zkoušku neuděláte!

(1) n-tice reálných čísel $\quad U = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\times} = \mathbb{R}^n$

tvoří vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

Sčítání
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \cdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

Násobení skalárem (= reálným číslem)
$$c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,x_1 \\ c\,x_2 \\ \vdots \\ c\,x_n \end{pmatrix}$$

Tyto operace mají požadované vlastnosti

$\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ nulový vektor

Opačný vektor k vektoru $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je $(-\vec{u}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

(2) n-tice komplexních čísel $U = \mathbb{C}^n$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$

Sčítání

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

Pozor: nyní $x_i, y_i \in \mathbb{C}$

Násobení skalárem $c \in \mathbb{C}$

$$c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c x_1 \\ c x_2 \\ \vdots \\ c x_n \end{pmatrix}$$

(3) Reálné matice tvaru $k \times n$ $\quad U = Mat_{k \times n}(\mathbb{R})$

Sčítání = sčítání matic

Násobení reálným číslem = násobení matice číslem

Nulový vektor = nulová matice

Opačný vektor k matici $A = (a_{ij})$ je $-A = (-a_{ij})$.

$Mat_{k \times n}(\mathbb{R})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

(4) $\mathbb{K}[x]$ polynomy v proměnné x s koeficienty v $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). $\quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Sčítání vektorů = sčítání polynomů

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots b_1 x + b_0)$$
$$= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Násobení skalárem

$$c (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = c a_n x^n + c a_{n-1} x^{n-1} + \dots + c a_0$$

(5) $\mathbb{K}_n[x]$ polynomy v proměnné x s koeficienty v $\mathbb{K}$ stupně nejvýše n

$$\mathrm{st}(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = n, \text{ pokud } a_n \neq 0.$$

⑥ Zobrazení z množiny M do $\mathbb{R}$ - množinu všech takových zobrazení označujeme $\mathbb{R}^M$. Je to vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Sčítání zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ je zobrazení $f+g : M \to \mathbb{R}$ definované předpisem pro $m \in M$ takto:

$$(f+g)(m) = \underbrace{f(m)+g(m)}_{\text{to je součet reálných čísel}}$$

Násobení skalárem $c \in \mathbb{R}$ definujeme pro zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ jako zobrazení $(cf) : M \to \mathbb{R}$ definované pro $m \in M$

$$(cf)(m) = \underbrace{c \cdot f(m)}_{\text{násobení reálných čísel}}$$

$\mathbb{R}^M$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.