8. přednáška: Matice lin. zobrazení a matice přechodu

Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení. Pro báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ prostoru U a bázi $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ prostoru V jsme definovali matici lin. zobrazení φ v bázích α a β

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \big((\varphi(u_1))_\beta \ (\varphi(u_2))_\beta \ \dots \ (\varphi(u_n))_\beta \big).$$

Je to matice typu $k \times n$, pro kterou platí

$$\forall u \in U : \quad (\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha .$$

Identické zobrazení $id: U \to U$, $id(u) = u$, je lineární. Uvažujme v U dvě různé báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Matici identického zobrazení $(id)_{\beta,\alpha}$ nazýváme matici přechodu mezi bázemi α a β

$$(id)_{\beta,\alpha} = \big((u_1)_\beta \ (u_2)_\beta \ \dots \ (u_n)_\beta \big)$$

Platí pro ni

$$\forall u \in U \quad (u)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha .$$

Speciálně $(id)_{\alpha,\alpha} = \big((u_1)_\alpha \ (u_2)_\alpha \dots (u_n)_\alpha \big) = E$.

Příklad: V $\mathbb{R}^3$ uvažujme báze $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ a $\alpha = \left(u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \big((u_1)_\varepsilon \ (u_2)_\varepsilon \ (u_3)_\varepsilon \big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \big((e_1)_\alpha \ (e_2)_\alpha \ (e_3)_\alpha \big) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešíme rovnice

$e_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + a_{31} u_3$ řešení je $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$e_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + a_{32} u_3$ řešení je $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$e_3 = a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + a_{33} u_3$ řešení je $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Počítání s maticemi zobrazení a přechodu

Věta 1 Nechť $\varphi: U \to V$, $\psi: V \to W$ jsou lineární a α, β, γ jsou postupně báze v U, V a W. Potom platí

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha},$$

kde $\cdot$ značí násobení matic a $\circ$ skládání zobrazení.

Všimněte si! $$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma \underbrace{\beta} \cdot \underbrace{\beta}(\varphi)_{\beta,\alpha}}$$

Důkaz: (1) Počítání: pro každé $u \in U$ platí

$$\big((\psi \circ \varphi)(u)\big)_\gamma = \underline{(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha}\,(u)_\alpha}$$

nebo jinak

$$\big((\psi \circ \varphi)(u)\big)_\gamma = \big(\psi(\varphi(u))\big)_\gamma = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi(u))_\beta = \underline{(\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}\,(u)_\alpha}$$

Podtržené výrazy si jsou rovny, tedy

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

(2) Pomocí „komutativního diagramu"

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\psi \circ \varphi"] & V \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "(\ )_\beta"] & W \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} x"'] \arrow[rr, bend right, "x \mapsto (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} x"'] & \mathbb{K}^k \arrow[r, "y \mapsto (\psi)_{\gamma,\beta} y"'] & \mathbb{K}^l
\end{tikzcd}$$

Proto je matice horního zobrazení $(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha}$ rovna $(\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$.

Věta 2 Nechť $\varphi: U \to V$ je lineární izomorfismus, α báze v U a β báze ve V. Potom platí

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \big((\varphi)_{\beta,\alpha}\big)^{-1}$$

Zápis vpravo je nutno chápat jako inverzní matici!

Důkaz: Podle předchozí věty platí ($\varphi^{-1}\circ\varphi : U \to U$ je id)

$$(id)_{\alpha,\alpha} = (\varphi^{-1}\circ\varphi)_{\alpha,\alpha} = (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}$$

$$E = (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}$$

Analogicky spočítáme

$$E = (\varphi)_{\beta,\alpha}\cdot(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}$$

Proto

$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}$ je inverzní matice k $(\varphi)_{\beta,\alpha}$.

Příklad na předchozí tvrzení: V příkladu na matici přechodu jsme měli $U = V = \mathbb{R}^3$, $\varphi = id : U \to U$, $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$, $\alpha = (u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\right)$ a spočítali jsme

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -3\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix} \qquad (id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

To jsou navzájem inverzní matice, o čemž se lze přesvědčit vynásobením.

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\varepsilon}\,(u)_\varepsilon$$

Matici $(id)_{\alpha,\varepsilon}$ používáme k výpočtu souřadnic v bázi α pomocí souřadnic v bázi ε.

Věta 3 Matice zobrazení v různých bázích. Nechť U je vekt. prostor s bázemi α a $\bar\alpha$ a V je vekt. prostor s bázemi β a $\bar\beta$. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení. Potom

$$(\varphi)_{\bar\beta,\bar\alpha} = (id)_{\bar\beta,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}\cdot(id)_{\alpha,\bar\alpha}$$

Důkaz pomocí věty o matici složeného zobrazení

$$\varphi = id_V \circ \varphi \circ id_U$$

$$\begin{tikzcd} \underset{\bar\alpha}{U} \arrow[r, "id_U"] \arrow[rrr, bend right, "\varphi"] & \underset{\alpha}{U} \arrow[r, "\varphi"] & \underset{\beta}{V} \arrow[r, "id_V"] & \underset{\bar\beta}{V} \end{tikzcd}$$

dává

$$(\varphi)_{\bar\beta,\bar\alpha} = (id_U)_{\bar\beta,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id_V)_{\alpha,\bar\alpha}$$

DETERMINANTY

Každé čtvercové matici $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ můžeme přiřadit číslo z K, které nazýváme

determinantem matice A

a značíme $\det A$ nebo také $|A|$.

Toto přiřazení je jednoznačně určeno svými vlastnostmi. Dříve, než tyto vlastnosti uvedeme, zavedeme označení: Řádky matice A bereme jako prvky $\mathbb{R}^n$ a značíme $r_1(A), r_2(A), \dots r_n(A)$. Tedy

$$A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$$

Sloupce matice A bereme jako sloupcové vektory z $\mathbb{R}^n$, značíme $s_1(A), s_2(A), \dots, s_n(A)$ a píšeme

$$A = \big(s_1(A)\ s_2(A)\ \dots\ s_n(A)\big).$$

Řádky jednotkové matice jsou $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Definice determinantu pomocí vlastností

Zobrazení

$$\det : \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

je jednoznačně určeno těmito vlastnostmi:

(1) $\det E = 1$

(2) Jestliže matice B vznikne z matice A vynásobením i-tého řádku číslem c, pak

$$\det B = c \cdot \det A.$$

(3) Jestliže matice B vznikne z matice A výměnou i-tého a j-tého řádku, pak

$$\det B = -\det A.$$

(4) Jestliže $r_1(A) = r_1(B)$, $r_2(A) = r_2(B)$, … $r_{i-1}(A) = r_{i-1}(B)$, $r_{i+1}(A) = r_{i+1}(B)$, …, $r_n(A) = r_n(B)$, tj. matice A a B se rovnají s výjimkou i-tého řádku a matice

$$C = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_{i-1}(A) \\ r_i(A) + r_i(B) \\ r_{i+1}(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$$

pak

$$\det C = \det A + \det B.$$

(5) Determinant transponované matice se rovná determinantu matice:

$$\det A^T = \det A.$$

Důsledky definice:

(a) Nechť matice A má nulový řádek, potom

$$\det A = 0.$$

Dk: Jestliže tento řádek matice A vynásobíme číslem $c = 0$, dostaneme opět matici A. Podle (2) platí

$$\det A = 0 \cdot \det A = 0 .$$

(b) Nechť má matice A dva stejné řádky, pak

$$\det A = 0 .$$

Dk: Jestliže tyto dva řádky přehodíme, dostaneme opět matici A. Podle (3) platí:

$$\det A = -\det A$$

Odtud $2 \det A = 0$, a tedy $\det A = 0$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q})$.

(c) Jestliže k i-tému řádku matice A přičteme c-násobek j-tého řádku $(i \neq j)$, pak nová matice B má $\det B = \det A$.

Dk: Řádek $r_i(B) = r_i(A) + c\, r_j(A)$. Podle (4) je

$$\det B = \det A + \det \begin{pmatrix} r_1(A) \\ c\, r_j(A) \\ \vdots \\ r_j(A) \\ r_n(A) \end{pmatrix}$$

Determinant 2. matice je podle (2) roven c-násobku determinantu matice se dvěma stejnými řádky a ten je podle (b) roven 0. Proto $\det B = \det C$.

(d)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Determinant diagonální matice je roven součinu čísel na hlavní diagonále.

Dk: Plyne z (1) $\det E = 1$ a pravidla (2).

(e) Determinant horní trojúhelníkové matice je součin čísel na hlavní diagonále

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

Totéž platí pro dolní Δ matici.

Dk: Při element. řádkových úpravách typu k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku ($i \neq j$) se determinant podle pravidla (c) nemění.

- Je-li nějaké z čísel $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ rovno 0, lze matici v horním Δ tvaru upravit těmito úpravami na schod. tvar, kde poslední řádek je nulový. Determinant této matice je nulový, tedy i determinant původní matice byl nulový, proto $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = 0$,
- jestliže $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$, lze zpětnou Gaussovou eliminací pomocí ERO výše uvedeného typu upravit na matici diagonální
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$
a její $\det = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$, tudíž i determinant původní matice musí být tento součin.

(f) Všechna pravidla, která platí pro řádky a element. řádkové operace, platí i pro sloupce a výpočet determinantu pomocí element. sloupcových úprav.

Obecná metoda pro výpočet determinantu

Matici A upravíme pomocí element. řádkových úprav na horní nebo dolní trojúhelníkovou matici. Její matici umíme spočítat a při úpravách víme, jak se determinant mění.

Speciální případy

(1) $n = 1$: $\det(a) = a$.

(2) $n = 2$ $\quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

neboť

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \end{pmatrix} \overset{(c)}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11}e_1 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{12}e_2 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11}e_1 \\ a_{21}e_1 \end{pmatrix} \overset{(c)}{+} \det \begin{pmatrix} a_{11}e_1 \\ a_{22}e_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \det \begin{pmatrix} a_{12}e_2 \\ a_{21}e_1 \end{pmatrix} \overset{(c)}{+} \det \begin{pmatrix} a_{12}e_2 \\ a_{22}e_2 \end{pmatrix} = a_{11}a_{21} \underbrace{\det \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}}_{0} +$$

$$+ a_{11}a_{22} \det \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + a_{12}a_{21} \det \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} + a_{12}a_{22} \underbrace{\det \begin{pmatrix} e_2 \\ e_2 \end{pmatrix}}_{0}$$

vyznačené det matic se stejnými řádky jsou nulové

$$= a_{11}a_{22} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12}a_{21} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \quad \text{záměna řádků}$$

$$= a_{11}a_{22} \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=1} - a_{12}a_{21} \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{1}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(3) $n = 3$ Analogicky jako pro $n = 2$ lze spočítat, že

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Příklad

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & & & & & \dots \\ 1 & 1 & 1 & & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{matrix}\text{K 1. řádku} \\ \text{přičteme} \\ \text{ostatní} \\ \text{řádky}\end{matrix} = \det \begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \dots & a+n-1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & & & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix}$$

$$= (a+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix} =$$

Od 2., 3., .. n-tého řádku odečteme 1. řádek

$$= (a+n-1)\det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}}_{\text{horní trojúhelníková matice}} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$