9. přednáška : DETERMINANTY

Minule : $\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

Má vlastnosti

(1) $\det E = 1$

(2) $B = \begin{pmatrix} c & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow \det B = c \det A$

(3) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow \det B = -\det A$

(4) $B = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \end{pmatrix} A \Rightarrow \det B = \det A$

modifikovaná

(5) $\det A^T = \det A$

Odvozené vlastnosti

- $\det \begin{pmatrix} a_{11} & & // // \\ & a_{22} & // // \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ // // & & \ddots & \\ // // & & & a_{nn} \end{pmatrix} = $ —"—

Lemma (I) Každou čtvercovou matici lze pomocí řádkových operací typu výměna řádků a přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému převést na schod. tvar, což je horní Δ matice.

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = H = \begin{pmatrix} h_{11} & & // // \\ & h_{22} & // // \\ 0 & & \ddots & \\ & & & h_{nn} \end{pmatrix}$$

/ zleva E_k^{-1}, E_{k-1}^{-1}

(*) $$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} H$$

Opět element. matice.

E_{ij} je výměna i-tého a j-tého řádku u jednotkové matice

$$\det E_{ij} = (-1) \det E = -1$$

E_{ij} je přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému

$$\det E_{ij} = \det E = 1$$

Matici A získáme z matice H pomocí řádk. úprav podle (*). Proto

$$\det A = \det E_1^{-1} \cdot \det E_2^{-1} \cdots \det E_k^{-1} \det H$$
$$= \det E_1^{-1} \cdot \det E_2^{-1} \cdots \cdot h_{11} h_{22} \cdots h_{nn}$$

(II) Je-li $\det H = h_{11} h_{22} \cdots h_{nn} \neq 0$, lze provádět zpětnou Gaussovu eliminaci a dostat diagonální matici s $h_{11} h_{22} \cdots h_{nn}$ na diagonále:

$$E_r \cdots E_{k+1} E_k \cdots E_1 A = E_r \cdots E_{k+1} H = D$$

Úpravou

$$A = E_1^{-1} \cdots E_r^{-1} D$$
$$\det A = \det E_1^{-1} \cdots \det E_r^{-1} \det D$$
$$= \text{———} \text{''} \text{———} \cdot h_{11} h_{22} \cdots h_{nn}$$

Poznámka

I $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II $$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

VĚTA Nechť matice $A \in Mat_{n\times n}(K)$ je tvaru

$$A = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\,k \\ \}\,n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} & \end{array}$$

Potom $\det A = \det B \cdot \det D$

Důkaz: $A = F_l \cdots F_1 H = F_l \cdots F_1 \begin{pmatrix} h_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & h_{nn} \end{pmatrix}$

Úpravy dvojího typu
(1) mezi řádky 1 až k
(2) mezi řádky k+1 až n

$$A = \underbrace{E_r \cdots E_1}_{\text{úpravy mezi řádky 1 a k}} \begin{pmatrix} h_{11} & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & h_{kk} & & & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\bar{E}_s \cdots \bar{E}_1}_{\text{úpravy mezi řádky } k+1 \dots n} \begin{pmatrix} 1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & h_{k+1k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & h_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det E_r \dots \det E_1 \det \bar{E}_s \dots \det \bar{E}_1$$
$$\cdot\, h_{11} \cdots h_{nn}$$

Dále víme

$$B = E_r \dots E_1 \begin{pmatrix} h_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & h_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \bar{E}_s \cdots \bar{E}_1 \begin{pmatrix} 0 & & * \\ h_{k+1k+1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & h_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D = \underbrace{\bar{E}_s \cdots \bar{E}_1}_{(m-k)\times(n-k)} \begin{pmatrix} h_{k+1\,k+1} & & * \\ 0 & \ddots & \\ & & h_{nn} \end{pmatrix}$$

$(n-k)\,(n-k)$

$$\det B = \det E_r \cdots \det E_1 \cdot h_{11} \cdots h_{kk}$$

$$\det D = \det \bar{E}_s \cdots \det \bar{E}_1 \cdot h_{k+1\,k+1} \cdots h_{nn}$$

Porovnáním dostaneme, že

$$\det A = \det B \cdot \det D.$$

Základní případ $A = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $\det A = b \cdot d$

$= \det(b) \cdot \det(d)$

$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ $\det A = \det B \cdot \det D$

Příklad Výpočet Vandermondova determinantu

Det matice $n \times n$

$$V(x_1, x_2, \dots x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Od 2., 3., … n-tého řádku odečteme 1. řádek.

Det se nemění

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \dots & & & & & \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & x_n^3 - x_1^3 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

Platí $\quad x_2^i - x_1^i = (x_2 - x_1)\left(x_2^{i-1} + x_2^{i-2}x_1 + x_2^{i-3}x_1^2 + \dots + x_1^{i-1}\right)$

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)$$

Z 2. řádku vytkneme $x_2 - x_1$

Z 3. řádku vytkneme $x_3 - x_1$ atd

$$\begin{array}{c} 1\times 1 \\ = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \det \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \\ \hline 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots \\ \dots & & & & \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \dots \end{array}\right) \\ (n-1)\times(n-1) \end{array}$$

$$= (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots & x_2^{n-2} + x_2^{n-3}x_1 + \dots + x_1^{n-2} \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \dots & x_n^{n-2} + x_n^{n-3}x_1 + \dots + x_1^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$(n-1)\times(n-1)$$

$$V(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Od $(n-1)$-ního sloupce odečteme x_1-násobek $(n-2)$-ho sloupce, od $(n-2)$-ho sloupce odečteme x_1-násobek $(n-3)$-tího sloupce atd

od 3. sloupce odečteme x_1-násobek 2. sloupce.

od 2. sloupce odečteme x_1-násobek 1. sloupce.

$$= (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\, V(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\,(x_3-x_2)\cdots$$

$$\cdots(x_n-x_{n-1})\, \underbrace{V(x_n)}_{\substack{\det(x_n^0) \\ \| \\ 1}}$$

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{n \geq j > i \geq 1} (x_j - x_i)$$

součin všech rozdílů $x_j - x_i$ kde $j > i$.

Důsledek předchozí věty

Matice A typu $n \times n$ má inverzní matici, právě když $\det A \neq 0$.

Až na cvičení

CAUCHYOVA VĚTA O DETERMINANTU

Pro každé dvě matice $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ platí

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Pozor NEPLATÍ $\det(A+B) \cancel{=} \det A + \det B$

Důkaz: Víme

$$A = F_1 \cdots F_r H$$

kde F_p jsou element. matice, H je horní Δ matice.

$$\det A = \pm \det H$$

$$\det(A \cdot B) = \det(F_1 \cdots F_r H \cdot B) =$$

$$= \underbrace{\det F_1 \cdots \det F_r}_{\pm 1} \det(H B)$$

$$\begin{matrix} h_{11} & & \neq 0 \\ & h_{22} & \neq 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \neq 0 \end{matrix}$$

(1) Jestliže $\det H = h_{11} h_{22} \cdots h_{nn} = 0$, pak poslední řádek H je nulový, neboť H je ve schod. tvaru.
Proto i matice $H \cdot B$ má poslední řádek nulový, $\det(H \cdot B) = 0$

$$\det(A \cdot B) = \det F_1 \cdots \det F_r \det(H \cdot B) = 0$$
$$\det A = \det F_1 \cdots \det F_r \underbrace{\det H}_{0} = 0$$

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{\det(AB)}} = \underset{0}{\underset{\parallel}{\det A}} \cdot \det B$$

(2) $\det H = h_{11} h_{22} \cdots h_{nn} \neq 0$

$$\begin{matrix} h_{11} & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & h_{nn} \end{matrix}$$

Pak

$$\boxed{A = \underbrace{F_1 F_2 \cdots F_s}_{\text{elem}} D}$$

D diagonální $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots d_n \end{pmatrix}$

$$\det A = \det F_1 \cdots \det F_s \det D$$
$$= \det F_1 \cdots \det F_s \, d_1 d_2 \cdots d_n$$

$$\det(A \cdot B) = \det(F_1 \cdots F_s D \cdot B) =$$
$$= \det F_1 \cdots \det F_s \det(D \cdot B)$$

$$DB = \begin{pmatrix} d_1 \, r_1(B) \\ d_2 \, r_2(B) \\ \vdots \\ d_n \, r_n(B) \end{pmatrix}$$

$$\det(DB) = d_1 d_2 \cdots d_n \det B$$

$$\det(AB) = \underbrace{\det F_1 \cdots \det F_s \, d_1 \cdots d_n}_{} \cdot \det B$$

$$= \det A \cdot \det B .$$

Důsledek Matice A typu $n \times n$ má inverzi, právě když $\det A \neq 0$.

Důkaz: $\Longrightarrow$ Nechť A má inverzi A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = E \qquad / \det$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det E$$

Cauchyova věta

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$\Longrightarrow \det A \neq 0$

$\Longrightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

$\Longleftarrow$ Nechť $\det A \neq 0$. Pak

$$A = \underbrace{F_1 \cdots F_s}_{\text{element}} \underbrace{D}_{\text{diagonální}} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$$

$$0 \neq \det A = \det F_1 \cdots \det F_s \, d_1 d_2 \cdots d_n$$

F_p mají inverzi

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & & 0 \\ & d_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n^{-1} \end{pmatrix}$$

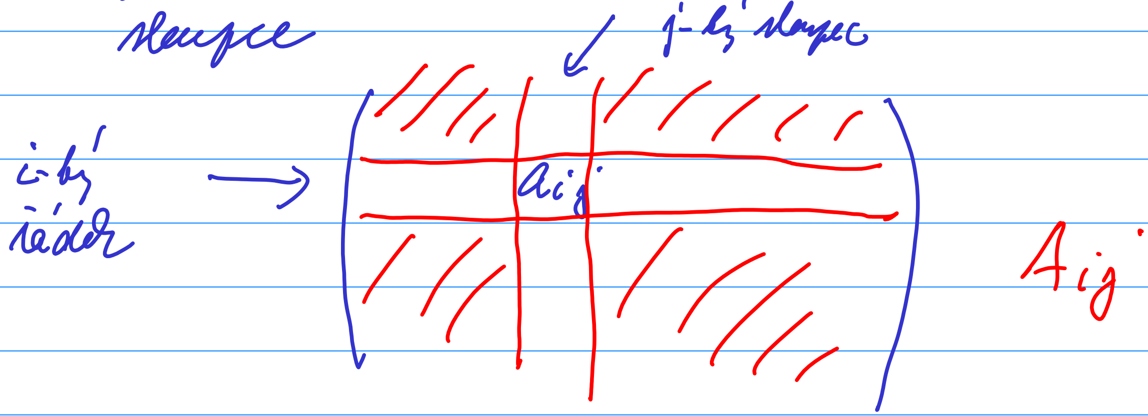
$$A^{-1} = (F_1 \cdots F_s D)^{-1}$$

$$= D^{-1} F_s^{-1} \cdots F_1^{-1}$$

Laplaceův rozvoj determinantu

$A = (a_{ij})$ $\quad n \times n$

A_{ij} je matice $(n-1)\times(n-1)$, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce



$$|A_{ij}| = \det A_{ij}$$

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$$ algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A

Věta o Laplaceově rozvoji determinantu

Nechť matice A je typu $n \times n$ a i je pevně zvolený řádek, $1 \le i \le n$. Potom

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,|A_{ij}|$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ & & \end{pmatrix}$$

Rozvoj podle 1. řádku

$$\underbrace{(-1)^{1+1}}_{1} a_{11}\,|A_{11}| + \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1} a_{12}\,|A_{12}| + \underbrace{(-1)^{1+3}}_{1} a_{13}\,|A_{13}| + \dots$$

Nechť j je pevně zvolený sloupec.
Rozvoj podle j-tého sloupce je

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\tilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{ij}|$$

Příklad Vypočti pomocí rozvoje podle 1. řádku
matice $(n+1)\times(n+1)$

$$\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix}$$

matice $n\times n$

$$= (-1)^{1+1} a_n \underbrace{\det \begin{pmatrix} x & & \\ -1 & x & 0 \\ & -1 & \ddots \\ & 0 & -1 \; x \end{pmatrix}}_{x^n}$$

$$\overbrace{+(-1)^{1+2} a_{n-1} \det}^{a_{n-1} x^{n-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & & \\ & & & & \\ & & & -1 & x \end{pmatrix}}_{(-1)\,x^{n-1}}$$

2×2 nulová

$$+(-1)^{1+3}\, a_{n-2} \det \begin{pmatrix} -1 & x & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ & & -1 & x & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x \end{pmatrix}$$

nulová

$(n-2)\times(n-2)$

$$\underbrace{\det \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ & & x \end{pmatrix}}_{a_{n-2}\, x^{n-2}}$$

$+ \cdots -$

$$+(-1)^{1+n+1}\, a_0 \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & x & & \\ & -1 & x & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & x \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{(-1)^n}$$

$$\underbrace{\underbrace{(-1)^{2n+2}}_{1} a_0}$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Výpočet inverzní matice pomocí alg. doplňků

A má inverzní matici, právě když $\det A \neq 0$

V takovém případě

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T$$

tedy

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ji}}{\det A}$$

- $\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det B \cdot \det D$
- Cauch. věta
- Lapl. rozvoj
- inv. matice pomocí alg. doplňků

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \det(5) = 5$$
$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \det(4) = -4$$
$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{1+2} \det(3) = -3$$
$$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \det(2) = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{2} & -\frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = E \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$