9. přednáška DETERMINANTY

Minule jsme definovali determinant matice jako zobrazení $\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, které splňuje vlastnosti (1) – (5). Jeho další vlastnosti (a) – (f) jsme odvodili. Pomocí těchto vlastností můžeme det matice počítat.

V této přednášce odvodíme další vlastnosti. Začneme opakováním toho, co jsme dokázali v přednášce o inverzních maticích:

Lemma: Každou čtvercovou matici lze pomocí elementárních řádkových operací typu k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku nebo výměna i-tého a j-tého řádku upravit na matici H ve schod. tvaru (je horní trojúhelníková)

$$E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 A = H = \begin{pmatrix} h_{11} & & * \\ & h_{22} & \\ 0 & & \ddots \; h_{nn} \end{pmatrix}$$

kde E_p jsou elementární matice odpovídající řádk. operacím. Přitom det zůstává při úpravách nezměněn nebo se násobí (-1). $\det E_p = 1$ nebo -1

$$\det E_k \cdot \det E_{k-1} \cdots \det E_1 \det A = \det H = h_{11} h_{22} \cdots h_{nn} .$$

Je-li $\det A = (\pm 1)\, h_{11} \cdot h_{22} \cdot \ldots \cdot h_{nn} \neq 0$, lze dalšími řádkovými úpravami dostat diagonální matici, tedy

$$E_l \cdot E_{l-1} \cdots E_k \ldots E_2 E_1 A = D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \; d_n \end{pmatrix}$$

Navíc

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{l-1}^{-1} E_l^{-1} D$$

kde E_p^{-1} jsou element. matice s $\det E_p^{-1} = \pm 1$ a

$$\det A = \det E_1^{-1} \cdot \det E_2^{-1} \cdots \det E_l^{-1} d_1 d_2 \cdots d_n$$

Důkaz:

matice E_p odpovídající přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku vznikne touto operací z jednotkové matice. Proto

$$\det E_p = \det E = 1.$$

(E_p výměna řádku ... $\det E_p = -\det E = -1$)

Inverzní matice E_p^{-1} vznikne odečtením c-násobku j-tého řádku od i-tého řádku na jednotkové matici.

Proto $\det E_p^{-1} = \det E = 1$.

Věta Nechť matice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ je tvaru

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

Potom

$$\det A = \det B \cdot \det C.$$

Poznámka: Tímto způsobem lze počítání det větších matic převést na počítání det menších matic.

Důkaz: Matici A lze do schod. tvaru převést řádkovými úpravami mezi řádky 1 až k a mezi řádky $k+1$ až n. Úpravy prvního typu převedou na schodovitý tvar i matici B a úpravy 2. typu převedou na schodovitý tvar matici C.

Proto

$$\det A = \underbrace{\det E_1 \ldots \det E_l}_{\pm 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} h_{11} & & * & & * & \\ & h_{22} & & & & \\ 0 & & \ddots\ h_{kk} & & & \\ \hline & & & h_{k+1\,k+1} & & * \\ & 0 & & & 0\ \ddots & \\ & & & & & h_{nn} \end{array}\right)$$

$$= \underbrace{\det E_1 \cdots \det E_s\, h_{11} h_{22} \cdots h_{kk}}_{\text{mezi řádky } 1-k} \cdot \underbrace{\det E_{s+1} \cdots \det E_l}_{\text{mezi řádky } k+1 \text{ až } n}$$
$$\cdot\, h_{k+1\,k+1} \cdot \ldots\, h_{nn} = \det B \cdot \det C$$

Příklad Vandermondův determinant

Spočítáme

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Nejdříve od 2., 3., .. až n-tého řádku odečteme 1. řádek. Det bude

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 & \cdots & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & x_n^3 - x_1^3 & & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

Protože

$$x_j^i - x_1^i = (x_j - x_1)\left(x_j^{i-1} + x_j^{i-2} x_1 + \cdots + x_1^{i-1}\right)$$

můžeme z j-tého řádku pro $j = 2, 3, \ldots, n$ vytknout $x_j - x_1$. Proto det se rovná

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \,\cdot$$

$$\cdot \det \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \hline 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \cdots & & x_2^{n-2} + x_2^{n-3} x_1 + \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2 & \cdots & & x_n^{n-2} + x_n^{n-3} x_1 + \cdots \end{array}\right)$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\ \det(1)\cdot\det\begin{pmatrix}1 & x_2+x_1 & x_2^2+x_2x_1+x_1^2 & \dots\\ 1 & x_3+x_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n+x_1 & x_n^2+x_nx_1+x_1^2 & \dots\end{pmatrix}$$

Zde jsme použili předchozí větu

Počítáme poslední determinant: Od n-tého sloupce odečteme x_1-násobek $(n-1)$-ního. Od $(n-1)$-ního odečteme x_1-násobek $(n-2)$-hého atd, až od 3. sloupce odečteme x_1-násobek 2. sloupce a od 2. sloupce odečteme x_1-násobek 1. sloupce. Dostaneme

$$\det\begin{pmatrix}1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-2}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & & & x_3^{n-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots\\ 1 & x_n & x_n^2 & & & x_n^{n-2}\end{pmatrix} = V(x_2, x_3, \dots x_n).$$

Odvodili jsme, že

$$V(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)V(x_2,\dots x_n)$$

Budeme-li tak pokračovat dále dostaneme, že

$$V(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{n\geq j>i\geq 1}(x_j-x_i)$$

což je součin všech rozdílů x_j-x_i pro $n\geq j>i\geq 1$.

Cauchyova věta o det součinu

Pro každé dvě matice $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ platí

$$\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$$

Důkaz: Podle lemmatu na začátku přednášky lze A psát ve tvaru

$$A = F_1F_2\dots F_r H$$

kde $F_1F_2\dots F_r$ jsou elementární matice, H je horní tvojí determinant a platí

$$\det A = \det F_1 \cdots \det F_r \cdot \det H = \underbrace{\det F_1 \cdot \ldots \cdot \det F_r}_{\pm 1} h_{11} \ldots h_{nn}$$

Proto

$$\det (A \cdot B) = \det (F_1 F_2 \ldots F_r \cdot H \cdot B) = \det F_1 \ldots \det F_r \cdot \det (HB)$$

(1) jestliže $\det H = h_{11} h_{22} \ldots h_{nn} = 0$, má H poslední řádek nulový (je ve schod. tvaru). Proto i součin

$H \cdot B$

má poslední řádek nulový, a tedy $\det (HB) = 0$.

$$\det (A \cdot B) = \pm \det (H \cdot B) = 0 = 0 \cdot \det B = \pm \det H \cdot \det B$$
$$= \det A \cdot \det B$$

(2) jestliže $\det H = h_{11} h_{22} \ldots h_{nn} \neq 0$, lze A psát ve tvaru

$$A = F_1 F_2 \ldots F_s D,$$

kde D je diagonální s čísly $h_{11}, h_{22}, \ldots h_{nn} \neq 0$ na diagonále. Platí

$$\det A = \det F_1 \ldots \det F_s \det D = \det F_1 \cdots \det F_s h_{11} h_{22} \ldots h_{nn}$$

Dále

$$\det (A \cdot B) = \det (F_1 \ldots F_s D B) = \det F_1 \ldots \det F_s \det (DB)$$

Matice DB vznikne z B vynásobením 1. řádku číslem h_{11}, 2. řádku číslem h_{22}, atd až n-tého řádku číslem h_{nn}. Proto

$$\det (A \cdot B) = \det F_1 \cdot \ldots \cdot \det F_s \det (DB) = \det F_1 \cdot \ldots \cdot \det F_s \cdot$$
$$\cdot h_{11} h_{22} \ldots h_{nn} \det B = \det A \cdot \det B.$$

Důsledek matice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ má inverzní, právě když $\det A \neq 0$.

Důkaz: $\Rightarrow$ Nechť A má inverzi A^{-1}. Potom

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Proto $\det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$

Podle Cauchyovy věty

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = 1,$$

tedy $\det A \neq 0$ a navíc

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

$\Leftarrow$ Nechť $\det A \neq 0$. Pak $A = F_1 \cdot F_2 \cdots F_k D$, kde $F_1, \dots F_k$ jsou elementární, D je diagonální s nenulovými čísly na diagonále.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & \ddots & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & 0 \\ & d_2^{-1} & \\ 0 & \ddots & d_n^{-1} \end{pmatrix}$$

F_i mají inversní matice. Proto i součin

$$A = F_1 \dots F_k D$$

má inversní matici.

Laplaceův rozvoj determinantu

$A = (a_{ij})$ matice $n \times n$

A_{ij} je matice $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z A tak, že vynecháme i-tý řádek a j-tý sloupec

Označíme

$$|A_{ij}| = \det A_{ij}$$

Algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A je číslo

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

Věta (o Laplaceově rozvoji podle i-tého řádku)

Nechť A je matice $n \times n$ a nechť i je pevné, $1 \le i \le n$.

Potom

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Příklad aplikace Laplaceova rozvoje

Mějme matici $(n+1)\times(n+1)$. Počítejme její det pomocí rozvoje podle 1. řádku:

$$\det\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & x \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} a_n \cdot \det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & x \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} a_{n-1} \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ & & & & \\ & & & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{n-2} \det\begin{pmatrix} -1 & x & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & & \\ 0 & 0 & x & & \\ & & -1 & x & \\ & & & \ddots & \\ & & & -1 & x \end{pmatrix} + \dots\dots\dots$$

$$+ (-1)^{1+n+1} a_0 \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \end{pmatrix} = a_n x^n + (-1)^{1+2} a_{n-1} \cdot (-1)\, x^{n-1}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{n-2} (-1)^2 x^{n-2} + \dots\dots + (-1)^{1+n+1} a_0 (-1)^n$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Důkaz Laplaceovy věty

i-tý řádek v matici A je součtem řádků

$$a_{i1}\cdot e_1 + a_{i2} e_2 + \dots + a_{in} e_n$$

Proto podle vlastnosti (4) determinantu je

$$\det A = \det\begin{pmatrix} \text{/////////} \\ a_{i1}\ 0\ 0 \cdots 0 \\ \text{////////} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \text{////////} \\ 0\ a_{i2}\ 0 \cdots 0 \\ \text{//////} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \det\begin{pmatrix} \text{/////////} \\ 0\ 0 \cdots 0\ a_{in} \\ \text{////////} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1}\det\begin{pmatrix} \text{///////} \\ 1\ 0\ 0 \cdots 0 \\ \text{///////} \end{pmatrix} + a_{i2}\det\begin{pmatrix} \text{///////} \\ 0\ 1\ 0 \cdots 0 \\ \text{///////} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+ a_{in}\det\begin{pmatrix} \text{//////} \\ 0\ 0\ 0 \cdots 0\ 1 \\ \text{//////} \end{pmatrix} =$$ přehodíme i-tý řádek s (i-1) prvním, (i-1) ní s (i-2) hým atd. až 2. s 1.

$$= a_{i1}(-1)^{i-1}\det\begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \cdots 0 \\ \text{////////} \end{pmatrix} + a_{i2}(-1)^{i-1}\det\begin{pmatrix} 0\ 1\ 0 \cdots 0 \\ \text{//////} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+ a_{in}(-1)^{i-1}\det\begin{pmatrix} 0\ 0\ 0 \cdots 0\ 1 \\ \text{///////} \end{pmatrix} =$$ přehazujeme sloupce $=$

$$= a_{i1}(-1)^{i-1}\det\begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \cdots 0 \\ \text{////////} \end{pmatrix} + a_{i2}(-1)^{i-1}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \cdots 0 \\ \text{/////} \end{pmatrix} +$$

$$+ \dots + a_{ij}(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\det\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0 \cdots 0 \\ \hline \text{/} & \text{//////} \end{array}\right) + \cdots$$

$= \det(1)\cdot\det(\text{////})$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-1+j-1} a_{ij}\,|A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,|A_{ij}|.$$

Lze provádět rovněž Laplaceův rozvoj podle j-tého sloupce : pro pevně zvolený sloupec j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\tilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,|A_{ij}| .$$

Výpočet inverzní matice pomocí alg. doplňků

Víme již, že A má inverzi, právě když $\det A \neq 0$. Dokážeme, že

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^{T}$$

transponovaná matice

tedy

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ji}}{\det A} .$$

Důkaz: Položíme $B = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^{T}$. Spočítáme

$$(A\cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\frac{\tilde{a}_{kj}}{\det A}$$

Pro $i=k$ je poslední výraz roven

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} = \frac{1}{\det}\underbrace{\sum a_{ij}\,\tilde{a}_{ij}}_{\text{Lapl. rozvoj } \det A} = \frac{1}{\det A}\cdot \det A = 1$$

Pro $i \neq k$ je poslední výraz roven Laplaceovu rozvoji podle k-tého řádku matice C, která je stejná jako A, pouze na místě k-tého řádku má řádek $r_i(A)$.

$$C = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{c} r_1(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ r_n(A) \end{array} \right) & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-tý řádek} \\ \\ \leftarrow k\text{-tý řádek} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Zřejmě $\det C = 0$, proto

$$(AB)_{i,k} = \frac{1}{\det A}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\tilde{a}_{kj}}_{\text{Lapl. rozvoj matice } C} = \frac{1}{\det A}\cdot \det C = 0$$

Závěr: $A\cdot B = E$