10. přednáška APLIKACE DETERMINANTU

Cramerovo pravidlo

Uvažujme matici A typu $n \times n$ s $\det A \neq 0$. Pak má soustava lineárních rovnic

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

právě jedno řešení, a to lze spočítat takto:

$$x_i = \frac{\det \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

Matice v čitateli vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupcem b.

Důkaz: Soustavu můžeme psát rovněž takto

$$x_1 s_1(A) + x_2 s_2(A) + \dots + x_n s_n(A) = b$$

kde $s_j(A)$ je j-tý sloupec matice A. Je zřejmé, že dvě matice se sloupci

$$s_1(A)\ s_2(A) \dots s_{i-1}(A)\ \{x_1 s_1(A) + x_2 s_2(A) + \dots + x_n s_n(A)\}\ s_{i+1}(A) \dots s_n(A)$$

a

$$s_1(A)\ s_2(A) \dots s_{i-1}(A)\ \ b\ \ s_{i+1}(A) \dots s_n(A)$$

musí mít stejný determinant, pokud $x_1, x_2 \dots x_n$ je řešením dané soustavy. Determinant druhé matice je čitatel zlomku v Cramerově pravidle. Spočítáme determinant první matice. Ten je součtem determinantů

$$\det(s_1(A)\ s_2(A)\ \ x_1 s_1(A) \dots s_n(A))$$
$$+ \det(s_1(A)\ s_2(A)\ \ x_2 s_2(A) \dots s_n(A)) + \dots$$
$$+ \det(s_1(A) \dots x_i s_i(A) \dots s_n(A) + \dots$$

$+ \det (s_1(A) \; \ldots \; x_n s_n(A) \; \ldots \; s_n(A)) = 0 + 0 + \ldots + 0 +$

$\det (s_1(A) \; \ldots \; x_i s_i(A) \; \ldots \; s_n(A)) + 0 + 0 \ldots + 0 =$

$= x_i \det A$

Tedy musí platit

$$x_i \det A = \det (s_1 A \; s_2 A \ldots b \ldots s_n A)$$

Je-li $\det A \neq 0$, je

$$x_i = \frac{\det (s_1 A \ldots b \ldots s_n A)}{\det A}$$

Příklad: Řešte soustavu s parametry a, b, c o neznámých x, y, z. Zjistěte, kdy je jednoznačně řešitelná.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= 2 \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z &= 3 \end{aligned}$$

det matice soustavy je

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

Je-li tento det $\neq 0$, tj. $b \neq a$, $c \neq a$, $c \neq b$, je

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & c \\ 3 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & b-2 & c-2 \\ 3 & b^2-3 & c^2-3 \end{pmatrix}}{(b-a)(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{\det \begin{pmatrix} b-2 & c-2 \\ b^2-3 & c^2-3 \end{pmatrix}}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{(b-2)(c^2-3) - (c-2)(b^2-3)}{(b-a)(c-a)(c-b)}$$

Analogicky y a z.

Budeme se zabývat geometrickými aplikacemi determinantu. K tomu je dobré si uvědomit, že platí věta

Věta (nulovost determinantu)

Nechť A je matice typu $n \times n$. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\det A = 0$,

(2) řádky matice A jsou lineárně závislé,

(3) sloupce matice A jsou lineárně závislé.

Důkaz: (2) $\Rightarrow$ (1) Nechť jsou řádky matice A lineárně závislé, pak jeden, např. $r_i(A)$ lze napsat jako lineární kombinaci ostatních

$$r_i(A) = c_1 r_1(A) + c_2 r_2(A) + \dots + c_n r_n(A)$$

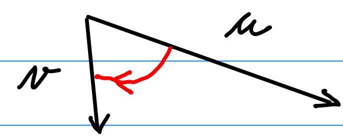
Jestliže v matici A od i-tého řádku odečteme c_1-násobek 1. řádku, c_2-násobek 2. řádku, atd. tak dostaneme matici s i-tým řádkem nulovým, přitom s determinantem rovným $\det A$. Proto $\det A = 0$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Nechť $\det A = 0$. Elementárními řádkovými úpravami upravíme A na schodovitý tvar B. Přitom jestliže $\det A = 0$, musí být i $\det B = 0$. Na diagonále schod. tvaru je číslo rovné 0, tedy poslední řádek matice B je nulový. Tento řádek je netriviální lineární kombinací řádků matice A. Proto jsou řádky matice A lineárně závislé.

Ekvivalenci (1) $\Leftrightarrow$ (3) bychom dokázali přechodem od matice A k transponované matici A^T. Sloupce přejdou v řádky a přitom $\det A^T = \det A$.

Orientace v $\mathbb{R}^2$

: mějme dvojici lin. nezávislých vektorů (u, v)



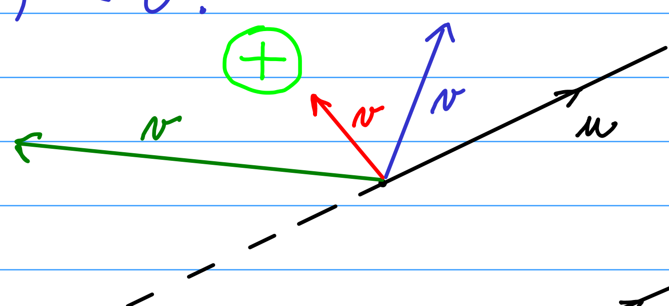
Orientace proti směru hodinových ručiček (od 1. vektoru k 2. vektoru) nazýváme ji kladná

Orientace podle směru hodinových ručiček záporná

Rozlišení orientace pomocí determinantu

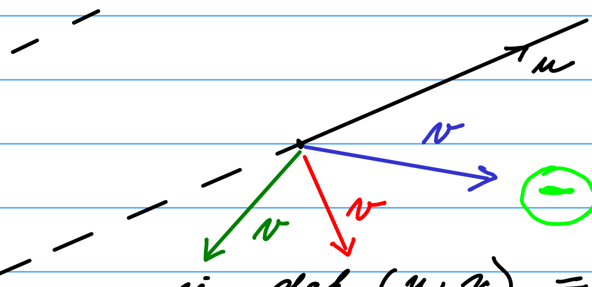
Vektory (u,v) jsou orientovány kladně, jestliže $\det(u\ v) > 0$ kde $(u\ v)$ je matice se sloupci u a v

Vektory (u,v) jsou orientovány záporně, jestliže $\det(u\ v) < 0$.



$\det(u,v) > 0$

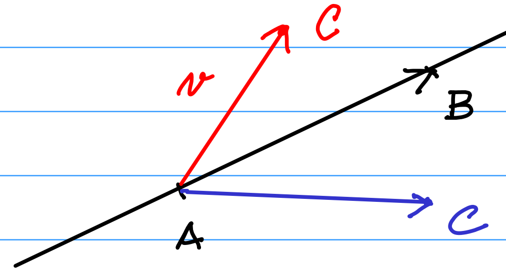
ale



$\det(u,v) < 0$

Když v leží na přímce určené vektorem u je $\det(u,v) = 0$

Příklad Jsou dány tři body A, B, C. Jak zjistíme, že bod C leží vlevo nebo vpravo od přímky AB uvažujeme-li orientaci od A k B?



$u = \overrightarrow{AB}$
$v = \overrightarrow{AC}$

C leží vlevo od $\overrightarrow{AB}$, jestliže jsou vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ kladně orientovány tj.

$$\det(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}) > 0$$

C leží vpravo od $\overrightarrow{AB}$, jestliže jsou vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ záporně orientovány, tj.

$$\det(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}) < 0.$$

Je-li $\det(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}) = 0$, leží bod C na přímce AB.

Orientace v $\mathbb{R}^3$ (obecně lze v $\mathbb{R}^n$)

Uspořádaná trojice vektorů (u_1, u_2, u_3), kde $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$, je orientována kladně, jestliže

$$\det(u_1\ u_2\ u_3) > 0,$$

a záporně, jestliže

$$\det(u_1\ u_2\ u_3) < 0,$$

kde $(u_1\ u_2\ u_3)$ je matice 3×3 se sloupci u_1, u_2, u_3.
Je-li $\det(u_1\ u_2\ u_3) = 0$, jsou tyto vektory lineárně závislé.
Je-li $\det(u_1\ u_2\ u_3) \neq 0$, jsou vektory u_1, u_2, u_3 lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^3$, tvoří tedy bázi.

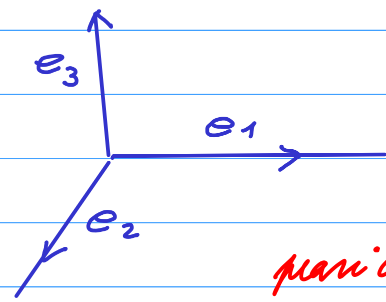
Proto hovoříme o kladně a záporně orientované bázi.

Příklad: Standardní báze e_1, e_2, e_3 je kladně orientovaná, neboť

$$\det(e_1\, e_2\, e_3) = \det E = 1 > 0.$$

Přehozením dvou vektorů dostaneme záporně orientovanou bázi, např. (e_3, e_2, e_1).

Obvykle kreslíme takto:



Všimněte si, že e_1, e_2, e_3 takto zakreslené splňují pravidla pravé ruky známé z fyziky.

Příklad: Jak zjistíme, zda body D a E leží na stejnou stranu od roviny ABC?

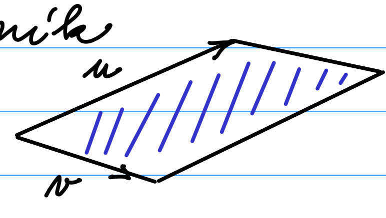
Odpověď: pomocí orientace trojic vektorů

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}$.

Je-li stejná, tj. znaménka příslušných determinantů jsou stejná, leží na stejné straně. Při různé orientaci leží na opačných stranách.

ORIENTOVANÝ OBSAH ROVNOBĚŽNÍKU

Uspořádaná dvojice vektorů (u, v) v rovině určuje rovnoběžník



Jsou-li u, v lineárně závislé (leží v jedné přímce) je obsah rovnoběžníka nulový.
Je-li (u,v) kladně orientovaná báze, definujeme orientovaný obsah $S(u,v)$ jako obsah.
Je-li (u,v) záporně orientovaná báze, definujeme orientovaný obsah $S(u,v)$ jako (-1) krát obsah.

Lemma: Orientovaný obsah splňuje tato pravidla

(1) $S(e_1,e_2) = 1$ obsah jednotkového čtverce

(2) $S(u,v) = -S(v,u)$

(3) $S(cu,v) = c\,S(u,v) = S(u,cv)$

(4) $S(u+z,v) = S(u,v) + S(z,v)$

$S(u, v+z) = S(u,v) + S(u,z)$

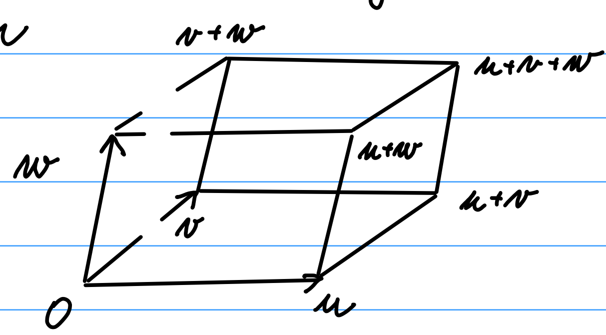
Věta $S(u,v)$ splňuje stejná pravidla jako det matice (u,v) se sloupci u a v. Proto

$$S(u,v) = \det(u,v).$$

Je-li $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, je $S(u,v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$.

ORIENTOVANÝ OBJEM ROVNOBĚŽNOSTĚNU

Nechť u, v, w jsou tři vektory v $\mathbb{R}^3$. Ty určují rovnoběžnostěn



Orientovaný objem rovnoběžnostěnu (u, v, w)

$$V(u,v,w) = (\pm 1) \cdot \text{objem rovnoběžnostěnu}$$

Znaménko $+$ bereme, jsou-li u, v, w kladně orientované a znaménko $-$ bereme, jsou-li záporně orientované.

Orientovaný obsah $V(u,v,w)$ splňuje stejná pravidla jako determinant matice 3×3 se sloupci u, v, w. Proto platí

Věta: $V(u, v, w) = \det(u, v, w)$

speciálně

$$V(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Poznámka:

Máme-li lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$, tak toto zobrazení zobrazí krychli danou vektory e_1, e_2, e_3 o orientovaném objemu 1, do rovnoběžnostěnu určeného vektory $Ae_1 = s_1(A)$, $Ae_2 = s_2(A)$, $Ae_3 = s_3(A)$, což jsou sloupce matice A. Orientovaný objem tohoto rovnoběžnostěnu je

$$\det\big(s_1(A)\ \ s_2(A)\ \ s_3(A)\big) = \det A\,.$$

Vektorový součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^3$

Nechť $u, v \in \mathbb{R}^3$. Je-li vektorový součin $u \times v$ je vektor v $\mathbb{R}^3$ o souřadnicích (ve standardní bázi), které se rovnají algebraickým doplňkům prvků x_1, x_2, x_3 v matici

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

tj. $(u\times v)_1 = \tilde{x}_1 = u_2 v_3 - v_2 u_3$

$(u\times v)_2 = \tilde{x}_2 = -(u_1 v_3 - v_1 u_3)$

$(u\times v)_3 = \tilde{x}_3 = u_1 v_2 - v_1 u_2$

Z vlastností determinantu lze odvodit:

VLASTNOSTI VEKTOROVÉHO SOUČINU

(1) Zobrazení $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

je lineární v první i druhé složce, tj.

$(au+bz)\times v = a(u\times v) + b(z\times v)$

(2) Vektory $(u, v, u\times v)$ jsou kladně orientované, pokud u a v jsou lineárně nezávislé.

(3) Vektor $u\times v$ je kolmý na u i na v.

Důkaz: (1) $\det(u, v, x) = x_1(u\times v)_1 + x_2(u\times v)_2 + x_3(u\times v)_3$

podle Laplaceova rozvoje podle posledního řádku.

Protože

$\det(au+bz, v, x) = a\det(u,v,x) + b\det(z,v,x)$,

dostáváme

$$\sum_{i=1}^{3} x_i((au+bz)\times v)_i = a\sum_{i=1}^{3} x_i (u\times v)_i + b\sum_{i=1}^{3} x_i (z\times v)_i$$

pro všechna x_1, x_2, x_3. Volbou $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, dostaneme

$$(au+bz)_1 = a(u\times v)_1 + b(z\times v)_1$$

Podobně pro další složky.

(2) Spočítejme $\det(u, v, u\times v)$:

$\det(u,v,u\times v) = (u\times v)_1^2 + (u\times v)_2^2 + (u\times v)_3^2 > 0$

pokud $u \neq 0$, $v \neq 0$ a u není násobkem v.

(3) Víme, že $\det(u,v,u) = 0$. Odtud

$$0 = \det(u,v,u) = u_1(u\times v)_1 + u_2(u\times v)_2 + u_3(u\times v)_3$$

tedy $u \perp u\times v$. Analogicky pro v.

Další vlastnost

(4) Velikost vektoru $u\times v$ je rovna (neorientovanému) obsahu rovnoběžníku určeného vektory u a v.

Důkaz: Orientovaný obsah rovnoběžnostěnu určeného vektory $u, v, u\times v$, lze spočítat dvěma způsoby.

Protože $u\times v$ je kolmý na u i na v je

$$V(u,v,u\times v) = \text{obsah rovnoběžníku}(u,v)\cdot\|u\times v\|$$

Druhý způsob přes determinant a jeho Laplaceův rozvoj

$$V(u,v,u\times v) = \det(u,v,u\times v) = (u\times v)_1^2 + (u\times v)_2^2 + (u\times v)_2^2$$
$$= \|u\times v\|^2$$

Porovnáním dostaneme, že

$$\|u\times v\| = \text{obsah rovnoběžníku } (u,v)$$

Poznámka Použitou definici na skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^3$ nelze použít na 2 vektory v $\mathbb{R}^n$ pro $n \neq 3$. V $\mathbb{R}^n$ můžeme analogicky definovat vektorový součin $(n-1)$ vektorů!