HODNOST MATICE

$A \in Mat_{k \times n}(\mathbb{K})$

Sloupce matice $s_1A, s_2A, \dots, s_nA \in \mathbb{K}^k$

Řádky matice $r_1A, r_2A, \dots, r_kA \in \mathbb{K}^n$

Sloupcová hodnost

$$h_s(A) = \dim_{\mathbb{K}} [s_1A, s_2A, \dots, s_nA]$$

Protože $s_iA \in \mathbb{K}^k$ $\quad [s_1A, \dots s_nA] \subseteq \mathbb{K}^k$

$$h_s(A) \leq k$$

Sloupců je n, proto

$$h_s(A) \leq n$$

Dohromady

$$h_s(A) \leq \min(k, n)$$

Definice jinak:

$h_s(A) =$ maximální počet lin. nezávislých sloupců

$$h_s \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} = 2$$

Analogicky: Řádková hodnost matice A je

$$h_r(A) = \dim_{\mathbb{K}} [r_1A, r_2A, \dots r_kA]$$

$r_iA \in \mathbb{K}^n$ $\qquad h_r(A) \leq n$

řádků je k $\qquad h_r(A) \leq k$

$$h_r(A) \leq \min(k, n)$$

$h_r(A) =$ max. počet lin. nezávislých řádků

VĚTA Platí $h_s(A) = h_r(A)$

Společnou hodnotu sloupc. a řádk. hodnosti nazveme hodností matice A, značíme
$h(A)$ rank(A)

Lemma: Řádk. hodnost matice se nemění při provádění element. řádk. operací.

Důkaz: $A \xrightarrow{\text{el. řádk. op.}} B$

$$[r_1A, r_2A, \dots r_kA] = [r_1B, r_2B, \dots, r_kB]$$

Dokážeme pro jedn. element. řádk. operace

(1) 1. řádek vynásobíme číslem $c \neq 0$. Chceme dk, že

$$U = [r_1A, r_2A, \dots r_kA] = [c\,r_1A, r_2A, \dots r_kA] = V$$

$\subseteq$ $\quad r_1A = \frac{1}{c} \cdot c\,r_1A \in V$

$\quad r_2A = r_2A \in V$

$\quad \dots$

$$U \subseteq V$$

$\supseteq$ $\quad c\,r_1A = c \cdot r_1A \in U$

$\quad r_2A = r_2A \in U$

$\quad \dots$

$$V \subseteq U$$

$$h_r(A) = \dim U = \dim V = h_r(B)$$

(2) Vyměníme 1. a 2. řádek

$$[r_1A, r_2A, r_3A, \dots] = [r_2A, r_1A, \dots]$$

rovnost je zřejmá.

(3) K 2. řádku přičteme c-násobek 1. řádku

$$U = [r_1A, r_2A, r_3A, \dots r_kA] = [r_1A, r_2A + cr_1A, \dots r_kA] = V$$

$V \subseteq U$ $\quad r_1A = r_1A \in U$

$\quad r_2A + cr_1A = r_2A + cr_1A \in U$

$\quad i \geq 3 \quad r_iA = r_iA \in U$

Protože je U je vekt. podprostor, leží v něm všechny lin. kombinace vektorů a proto lin. obalu $V \subseteq U$.

$U \subseteq V$ $\quad r_1A = r_1A \in V$

$\quad r_2A = r_2A + cr_1A - c \cdot r_1A \in V$

$\quad r_iA = r_iA \in V$

Všechny generátory podprostoru U leží v podprostoru V, proto i $U \subseteq V$.

Závěr $\quad U = V \Rightarrow h_r A = \dim U = \dim V = h_r B$.

Poznámka: Totéž platí pro sloupcovou hodnost a pro element. sloupc. operace.

Aplikace lemmatu.

Matice $A \rightsquigarrow$ Gaussova elim. $\rightsquigarrow B$

B je ve schod. tvaru.

$$h_r(A) = h_r(B)$$

$$h_r(B) = h_r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 = \text{počet nenulových řádků}$$

$h_r(B)$ = počet nenulových řádků
= počet ved. koeficientů

Důkaz věty $h_r(A) = h_s(A)$

Připomeneme algoritmus, kterým se dospěje výběru lin. nezávislé se stejným lin. obalem

$$(s_1\ s_2 \dots s_n) \xrightarrow[\text{operace}]{\text{el. řádk.}} \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & & \\ \left(\begin{matrix} \bullet & & & \\ 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{matrix}\right. & & & \left.\right) \end{array}$$

$[s_{i_1} \dots s_{i_k}] = [s_1 \dots s_n]$

A Gauss. eliminací upravíme na matici B ve schod. tvaru:

$h_s(A)$ = počet ved. koeficientů v B
= počet nenul. řádků v B
= $h_r(B) = h_r(A)$

Vztah hodnosti a determinantu

A matice $n \times n$

VĚTA: $\det A \neq 0$ právě když $h(A) = n$.

Důkaz: $A \xrightarrow[\text{operace}]{\text{el. řádk.}} B$ ve schod. tvaru

$\det A \neq 0$ právě když $\det B \neq 0$ právě když B má všechny řádky nenulové $\Leftrightarrow h_r(B) = n$ $\Leftrightarrow h(A) = h(B) = n$.

SOUSTAVY LIN. ROVNIC

3 věci $\quad A \quad k \times n \quad A \in Mat_{k \times n}(\mathbb{C})$

$x \in \mathbb{K}^n \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b \in \mathbb{K}^k \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$

Soustava $\quad Ax = b.$

Množina řešení

$$Res(A, b) = \{x \in \mathbb{K}^n,\ Ax = b\}$$

(1) Věta o dimenzi řešení hom. soustavy.
Množina řešení hom. soustavy lin. rovnic

$$Ax = 0$$

je vekt. podprostor v $\mathbb{K}^n$ dimenze

$$n - h(A).$$

Důkaz: Uvažujme lin. zobrazení

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k \qquad \varphi(x) = Ax$$

Platí

$$Res(A, 0) = \{x \in \mathbb{K}^n,\ Ax = 0\} = \ker \varphi$$

Volba věci dimenzovní

$$\dim \ker \varphi = \underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{n} - \dim \operatorname{im} \varphi$$

$$\operatorname{im} \varphi = [\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n)] = [Ae_1, Ae_2, \dots Ae_n]$$

$$= [s_1A, s_2A, \dots s_nA]$$

$$\dim \operatorname{im} \varphi = \dim [s_1A, \dots s_nA] = h_S(A) = h(A)$$

Závěr

$$\dim \operatorname{Řeš}(A,0) = \dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{im} \varphi$$
$$= n - h(A).$$

__Příklad:__ Rovina v $\mathbb{R}^3$ proch. počátkem

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

$A = (a_1\ a_2\ a_3) \neq 0$ $\qquad Ax = 0$

$h(A) = 1$

$$\dim \operatorname{Řeš}(A|0) = 3 - h(A) = 3 - 1 = 2.$$

Přímka v $\mathbb{R}^3$ proch. počátkem

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0$$

(a_{11}, a_{12}, a_{13}) a (a_{21}, a_{22}, a_{23}) lin. nezávislé.

$$h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim \operatorname{Řeš}(A,0) = 3 - h(A) = 3 - 2 = 1.$$

② Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy

Soustava lin. rovnic

$$Ax = b$$

má řešení, právě když

$$h(A) = h(A|b).$$

Důkaz: Nechť $Ax = b$ má řešení $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Rovnost $Ax = b$ lze napsat takto

$$s_1 A x_1 + s_2 A x_2 + \cdots + s_n A x_n = b.$$

To znamená, že b je lin. kombinací sloupců matice A. A tedy

$$[s_1A, s_2A, \dots s_nA] = [s_1A, \dots, s_nA, b]$$
$$\dim [s_1A, \dots, s_nA] = \dim [s_1A, \dots s_nA, b]$$
$$h(A) = h(A|b)$$

Obráceně: Nechť $h(A) = h(A|b)$

To znamená

$$\dim [s_1A, \dots s_nA] = \dim [s_1A, \dots s_nA, b]$$

Současně $\quad U = [s_1A, \dots s_nA] \subseteq [s_1A, \dots, s_nA, b] = V$

máme dva podprostory $U \subseteq V$ se stejnými dimenzemi. Podle jedné z vět platí, že pak

$$U = V.$$

Tedy $\quad [s_1A, \dots s_nA] = [s_1A, \dots s_nA, b]$

a odtud plyne, že b je lin. kombinace sloupců matice A.

$$s_1A \cdot x_1 + s_2A \cdot x_2 + \dots + s_nA\, x_n = b$$

Pak $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je řešení soustavy $Ax = b$.

3 Věta o struktuře řešení

Nechť soustava

$$Ax = b$$

má nějaké řešení $z \in K^n$. Potom

$$Res(A, b) = \{z + y \in K^n;\ kde\ y \in Res(A, 0)\}$$
$$= z + Res(A, 0)$$

Důkaz: $\{z + y \in K^n,\ kde\ y \in Res(A, 0)\} \underline{\subseteq} Res(A, b)$

Víme $Az = b$, $Ay = 0$.

Potom

$$A(z+y) = Az + Ay = b + 0 = b$$

Tedy $z + y \in \mathrm{Res}(A, b)$.

- $\mathrm{Res}(A, b) \subseteq \{z + y \in K^k,\ \text{kde } y \in \mathrm{Res}(A, 0)\}$

$x \in \mathrm{Res}(A, b)$ $\quad Ax = b$, současně víme $Az = b$.

$$x = z + (x - z), \quad \text{označme } y = x - z$$

$$Ay = A(x-z) = Ax - Az = b - b = 0,$$

Tedy x je tvaru $z + y$, kde $y \in \mathrm{Res}(A, 0)$.

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10$$

$$x_2 = 3a, \quad x_3 = b$$

$$3x_1 + 6a + 6b = 10$$

$$3x_1 = 10 - 6a - 6b$$

$$x_1 = \frac{10}{3} - 2a - 2b$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{10}{3} - 2a - 2b, 3a, b\right) \in \mathrm{Res}(A, b)$$

$$= \left(\frac{10}{3}, 0, 0\right) + (-2a - 2b, 3a, b)$$

$\left(\frac{10}{3}, 0, 0\right)$ je řešení $Ax = b$. Hovoříme o partikulárním řešení.

$(-2a-2b, 3a, b)$ je řešení homogenní soustavy

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0$$
$$3(-2-2b) + 2(3a) + 6b = 0$$

dim. řešení hom. soustavy je
$$3 - h(3\ 2\ 6) = 3 - 1 = 2$$
a řešení je popsáno pomocí 2 parametrů.