Domácí úkoly ke cvičení č. 11

1. Nechť zobrazení $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, které má vzhledem k bázi $\sigma = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde

$$\mathbf{s}_1 = (1, 2, 3),\ \mathbf{s}_2 = (3, 7, 8),\ \mathbf{s}_3 = (4, 9, 10),$$

a vzhledem k bázi $\tau = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, kde

$$\mathbf{t}_1 = (1, 1, 1, -1),\ \mathbf{t}_2 = (1, 1, -1, -1),\ \mathbf{t}_3 = (1, -1, -1, 1),\ \mathbf{t}_4 = (1, -1, 1, -1),$$

matici

$$(\eta)_{\tau,\sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici Q typu 4/3 nad $\mathbb{R}$ takovou, aby pro libovolný vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ a pro jeho obraz $\eta((x_1, x_2, x_3)) \in \mathbb{R}^4$, $\eta((x_1, x_2, x_3)) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ platilo

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2. Nechť $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární transformací vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ mající vzhledem k bázi $\gamma = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde

$$\mathbf{g}_1 = (1, 1, 2),\ \mathbf{g}_2 = (1, 0, 1),\ \mathbf{g}_3 = (2, 1, 1),$$

matici

$$(\lambda)_{\gamma,\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, které je na vektorech standardní báze $\nu = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ zadáno obrazy těchto vektorů

$$\mu(\mathbf{c}_1) = (1, 2, -1, -2),\ \mu(\mathbf{c}_2) = (1, -2, -1, 2),$$
$$\mu(\mathbf{c}_3) = (2, -1, -2, 1).$$

Zjistěte, zda výše uvedená lineární transformace λ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ je lineárním izomorfismem. Je-li tomu tak, pak uvažte inverzní lineární transformaci λ^{-1} vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ a složené lineární zobrazení $\mu \circ \lambda^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. V tom případě potom najděte matici C typu 4/3 nad $\mathbb{R}$ mající tu vlastnost, že pro libovolný vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ a pro jeho obraz $\mu(\lambda^{-1}((x_1, x_2, x_3))) \in \mathbb{R}^4$ při složeném lineárním zobrazení $\mu \circ \lambda^{-1}$, $\mu(\lambda^{-1}((x_1, x_2, x_3))) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ bude platit

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, které je na vektorech báze $\varsigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde

$$\mathbf{f}_1 = (2, 1, 3),\ \mathbf{f}_2 = (3, 2, 4),\ \mathbf{f}_3 = (1, 3, -2)$$

zadáno obrazy těchto vektorů

$$\varphi(\mathbf{f}_1) = (1, 1, -1, -1),\ \varphi(\mathbf{f}_2) = (1, -1, 1, -1),$$
$$\varphi(\mathbf{f}_3) = (1, -1, -1, 1).$$

Nechť $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, které je na vektorech standardní báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ zadáno obrazy těchto vektorů

$$\psi(\mathbf{e}_1) = (1, 0, -1),\ \psi(\mathbf{e}_2) = (1, -1, 0),\ \psi(\mathbf{e}_3) = (0, 1, -1),\\ \psi(\mathbf{e}_4) = (1, 1, 1).$$

Zjistěte, zda složené lineární zobrazení, tedy lineární transformace $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ je lineárním izomorfismem. Je-li tomu tak, potom uvažte inverzní lineární transformaci $(\psi \circ \varphi)^{-1}$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. V tom případě pak najděte čtvercovou matici D řádu 3 nad $\mathbb{R}$ takovou, že pro libovolný vektor $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a pro jeho jediný vzor $(\psi \circ \varphi)^{-1}((y_1, y_2, y_3)) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k výše zmíněné lineární transformaci $\psi \circ \varphi$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ bude při označení $(\psi \circ \varphi)^{-1}((y_1, y_2, y_3)) = (r_1, r_2, r_3)$ platit

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$