

M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 29. listopadu 2023.

12 Inverzní funkce (goniotrických funkcí)

Cvičení konaná 4. a 5. 12. 2023.

Příklad 12.1: Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní. Na těchto intervalech určete inverzní funkci.

1. $f(x) = x^2 + x - 6$,

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$.

Řešení: 1) $I_1 = (-\infty, -1/2]$ a $I_2 = [-1/2, \infty)$; Pro I_1 je inverzní funkce $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{25}{4}}$, s definičním oborem $[-\frac{25}{4}, \infty)$ a oborem hodnot I_1 ; Pro I_2 je inverzní funkce $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{25}{4}}$, s definičním oborem $[-\frac{25}{4}, \infty)$ a oborem hodnot I_2 . 2) $I_1 = (-\infty, -6]$ a $I_2 = [2, \infty)$; Pro I_1 je inverzní funkce $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x^2 + 16}$, s definičním oborem $[0, \infty)$ a oborem hodnot I_1 ; Pro I_2 je inverzní funkce $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x^2 + 16}$, s definičním oborem $[0, \infty)$ a oborem hodnot I_2 .

Příklad 12.2: Funkce arcsin je inverzní funkce k funkci sin na intervalu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Napište předpis inverzní funkce k funkci sin na intervalu

1. $[2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$,

2. $[(2k + 1)\pi - \frac{\pi}{2}; (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2}]$

pomocí funkce arcsin.

3 Navrhněte a řešte analogickou úlohu pro dvojice funkcí cos, arccos, resp. tg, arctg.

Řešení: 1) $\arcsin x + 2k\pi$. 2) $-\arcsin x + (2k + 1)\pi$.

Příklad 12.3: Najděte maximální interval obsahující 0, na němž je funkce f monotónní. Na tomto intervalu určete inverzní funkci.

1. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$,

2. $f(x) = \sin x + \cos x$,

3. $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x$,

4. $f(x) = \log(\cos x)$,

5. $f(x) = \log(\log(x + 10))$.

Řešení: 1) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, $I = [-\pi/4, \pi/4]$, $H(f) = [-1/2, 1/2]$, tzn. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arcsin 2x$ s definičním oborem $[-1/2, 1/2]$ a oborem hodnot I .

2) $f(x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x - \pi/4)$, $I = [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$, $H(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, tzn. $f^{-1}(x) = -\arccos(\frac{-y}{\sqrt{2}}) + \frac{\pi}{4}$ s definičním oborem $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ a oborem hodnot I .

3) $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi/6)$, $I = [-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$, $H(f) = [-2, 2]$, tzn. $f^{-1}(x) = \arcsin(\frac{y}{2}) - \frac{\pi}{6}$ s definičním oborem $[-2, 2]$ a oborem hodnot I .

4) Protože funkce \cos (a tudíž i funkce f) nabývá v bodě 0 svého maxima, existují dva maximální intervaly I_1 a I_2 obsahující bod 0, kde je f monotónní: $I_1 = (-\frac{\pi}{2}, 0]$ a $I_2 = [0, \frac{\pi}{2})$. V obou případech je $H(f) = (-\infty, 0]$. Pro I_1 je inverzní funkce $f^{-1}(x) = -\arccos(10^x)$, s definičním oborem $(-\infty, 0]$ a oborem hodnot I_1 ; Pro I_2 je inverzní funkce $f^{-1}(x) = \arccos(10^x)$, s definičním oborem $(-\infty, 0]$ a oborem hodnot I_2 .

5) Definiční obor funkce f je $(-9, \infty)$ a obor hodnot je \mathbb{R} . Funkce je na svém definičním oboru rostoucí. Tedy $f^{-1}(x) = 10^{10^x} - 10$ má definiční obor \mathbb{R} a obor hodnot $(-9, \infty)$.

Příklad 12.4: Funkce \arccos je inverzní funkce k funkci $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. Pomocí této funkce vyjádřete funkci g , která je inverzní k funkci $f(x) = 3 \cos 2x - 1$ uvažované na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. (Definiční obor funkce g je tedy obor hodnot funkce f , pokud zúžíme definiční obor funkce f na interval $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.)

Řešení: Pro $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ máme $f(x) = 3 \cos 2x - 1 \in [-4, 2]$. (Poznamenejme, že funkce je na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ rostoucí, a tedy funkce g je jako inverzní funkce k f dobře definována.) Proto $g : [-4, 2] \rightarrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Pro dané $y \in [-4, 2]$ chceme ze vztahu $3 \cos 2x - 1 = y$ vypočítat pro toto y správnou hodnotu $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Dostáváme $\cos 2x = \frac{y+1}{3}$, kde $\frac{y+1}{3} \in [-1, 1]$. Pokud nyní použijeme funkci \arccos , dostaneme hodnotu $a = 2x = \arccos(\frac{y+1}{3}) \in [0, \pi]$. My ale hledáme $b = 2x \in [\pi, 2\pi]$ s vlastností $\cos b = \cos a$. Takové b zřejmě splňuje $b + a = 2\pi$. Tedy $2x = b = 2\pi - a = 2\pi - \arccos(\frac{y+1}{3})$. Odtud $x = \pi - \frac{1}{2} \arccos(\frac{y+1}{3})$. (Všimněme si, že $\frac{1}{2} \arccos(\frac{y+1}{3}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, a proto $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, jak bylo požadováno.) Závěr tedy je, že funkce $g : [-4, 2] \rightarrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$ je dána předpisem $g(x) = \pi - \frac{1}{2} \arccos(\frac{x+1}{3})$.

Příklad 12.5: Následující vztahy lze použít pro výpočet $\arccos x$ a $\arctan x$ při znalosti hodnoty $\arcsin x$. Dokažte tyto vztahy.

1. Pro libovolné $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

2. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $\arctan x = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$.

Nápověda: 1) Použijte vztah $\cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y) = x$ pro $y \in [0, \pi]$. 2) Umocněte na druhou $x = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y}$ a nahraďte $\cos^2 y$ výrazem $1 - \sin^2 y$. Následně rovnost upravte rovnost do tvaru $x^2 = (x^2 + 1) \sin^2 y$, z níž lze hodnotu $y = \arctan x$ vypočítat pomocí funkce $\arcsin x$.

Příklad 12.6: Určete nejmenší periodu zadané funkce:

1. $f(x) = \sin x + \cos x$,

2. $f(x) = \sin 3x$,

3. $f(x) = |\cos 2x|$,

4. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,

5. $f(x) = \sin x^2$,

6. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$.

Řešení: 1) 2π . 2) $\frac{2\pi}{3}$. 3) $\frac{\pi}{2}$. 4) není periodická. 5) není periodická. 6) 2π .