

## M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 5. října 2023.

### 4 Monotonie a kvadratické funkce

Cvičení konaná 9. a 10. 10. 2023.

#### Příklad 4.1:

1. Definujte (formálně) pojem „funkce  $f$  je rostoucí na intervalu  $I$ “.
2. Definujte formálně „maximální interval, kde je funkce  $f$  rostoucí“.
3. U funkcí z příkladů 3.1, 3.2 a 3.4 zjistěte, na kterých maximálních intervalech jsou rostoucí, resp. klesající.
4. Zformulujte precizně tvrzení, že složení rostoucích funkcí (na intervalu) je rostoucí funkce (na intervalu) a větu dokažte. Zejména si uvědomte, jaké všechny předpoklady je třeba uvést. Přesněji: pokud  $g$  je rostoucí funkce na intervalu  $I$ , kde  $I \subseteq D(g)$ , a dále  $f$  je rostoucí funkce na intervalu  $J \subseteq D(f)$ , potom ještě musíme něco předpokládat o množině  $\{g(x); x \in I\}$ , abychom mohli dokázat, že  $f \circ g$  je rostoucí na intervalu  $I$ .

#### Příklad 4.2: Nakreslete graf funkce

$$f(x) = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) - 1.$$

Určete všechny maximální intervaly, na nichž je funkce klesající (resp. rostoucí). Určete všechna  $x \in \mathbb{R}$  splňující  $f(x) = 0$ . Určete zejména, kolik je takových reálných čísel v intervalu  $(0, 2\pi)$ .

#### Příklad 4.3: Mějme funkci

$$f(x) = \frac{1}{|e^{2x-1} - 1|}.$$

Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete, na kterých maximálních intervalech je tato funkce rostoucí nebo klesající.

**Příklad 4.4:** Nechť  $f$  a  $g$  jsou rostoucí funkce na intervalu  $I$ , tj. zejména  $I \subseteq D(f) \cap D(g)$ . Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce  $h$  daná následujícím předpisem:

1.  $h(x) = f(x) + g(x)$ ,
2.  $h(x) = f(x) - g(x)$ ,

3.  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ,

4.  $h(x) = -g(x)$ ,

5.  $h(x) = g(x) \cdot g(x)$ ,

6.  $h(x) = |g(x)|$ ,

7.  $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ .

V případech, kdy odpovídáte „ano“, se pokuste o formální důkaz. V případech, kdy odpovídáte „ne“, dejte protipříklad a navíc se pokuste (přidáním vhodných předpokladů pro funkce  $f$  a  $g$ ) zformulovat platné tvrzení.

**Příklad 4.5:** Nechť  $g$  je rostoucí funkce na intervalu  $I$ , tj. zejména  $I \subseteq D(g)$  a necht'  $c \in \mathbb{R}$  je pevně zvolené reálné číslo. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce  $h$  daná následujícím předpisem:

1.  $h(x) = g(x) + c$ ,

2.  $h(x) = c - g(x)$ ,

3.  $h(x) = c \cdot g(x)$ .

Pozor, odpověď se může lišit v závislosti na parametru  $c$ .

**Příklad 4.6:** Udejte příklad rostoucích funkcí  $f$  a  $g$  s definičním oborem  $\mathbb{R}$  takových, že funkce  $h$ , daná předpisem  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ , je klesající funkce na celém definičním oboru  $D(h) = \mathbb{R}$ .

*Nápověda: Pokuste se nejdříve načrtnout grafy vašich funkcí  $f$ ,  $g$  a  $h$ . Poté se pokuste vymyslet nějaký vhodný předpis pro tyto funkce (jako složení elementárních funkcí).*

**Příklad 4.7:** Nechť  $f$  je rostoucí funkce na celém definičním oboru  $D(f) = \mathbb{R}$  s oborem hodnot  $H(f) = (0, \infty)$ . Uvažujme dále funkci  $g$  danou předpisem  $g(x) = x \cdot f(x)$ . Dokažte, že funkce  $g$  je rostoucí na intervalu  $I = (0, \infty)$ .

V důkazu identifikujte krok, kde se využije předpoklad  $H(f) = (0, \infty)$ , a dále krok, kde se využije předpoklad, že  $I$  obsahuje pouze kladná reálná čísla.

Ukažte, že oba tyto předpoklady jsou nutné. Zejména dejte příklad rostoucí funkce  $f$  s definičním oborem  $D(f) = \mathbb{R}$ , takové, že  $H(f)$  obsahuje 0 nebo záporné číslo, pro niž funkce  $g(x) = x \cdot f(x)$  není rostoucí na intervalu  $I = (0, \infty)$ . Poté zformulujte podobně tvrzení o existenci funkce  $f$  v druhém případě a dejte vhodný příklad takové funkce.

**Příklad 4.8:** Pomocí úpravy na čtverec odvodte “vzoreček” pro řešení obecné kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Načrtněte graf kvadratické funkce  $f(x) = ax^2 + bx + c$  pro  $a > 0$  a pro  $a < 0$ . Určete, jaké maximum nebo minimum tato funkce nabývá a v kterém bodě.

**Příklad 4.9:** Určete všechny hodnoty parametru  $r \in \mathbb{R}$  tak, aby daná nerovnost platila pro všechna  $x \in A$ . (Kreslete si, jak musí vypadat grafy příslušných kvadratických funkcí.)

- a)  $(r + 4)x^2 - 2rx + 2r - 6 < 0$ ,  $A = \mathbb{R}$ .
- b)  $rx^2 - 4x + 3r + 1 > 0$ ,  $A = (0, \infty)$ .
- c)  $(r - 2)x^2 + rx + 1 - r > 0$ ,  $A = (0, \infty)$ .
- d)  $(x - 3r)(x - r - 3) < 0$ ,  $A = [1, 3]$ .

**Příklad 4.10:** Určete všechny hodnoty parametru  $r \in \mathbb{R}$  tak, aby nerovnost  $(r - 2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$ , platila pro všechna  $x \in [3, 5]$ .

**Příklad 4.11:** Určete všechny hodnoty parametru  $r \in \mathbb{R}$  tak, aby nerovnost

$$(rx - 1)(x + r) < 0$$

platila pro všechna  $x \in A$ .

- a)  $A = (0, 1)$ .
- b)  $A = (-1, 1)$ .
- c)  $A = (-2, 2)$ .
- d)  $A = (0, \infty)$ .

**Příklad 4.12:** Určete, kdy pro řešení  $x_1 \leq x_2$  rovnice

$$2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$$

platí  $x_1 < a < x_2$ . *Nápověda:* Vyznačte na grafu příslušné kvadratické funkce její hodnotu v  $a$ .

**Příklad 4.13:** Určete, kdy pro řešení  $x_1$  a  $x_2$  rovnice

$$(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$$

platí  $x_1 > 3$  a  $x_2 < 2$ .

**Příklad 4.14:** Určete, pro která  $a \in \mathbb{R}$  má následující polynom dvojnásobný kořen

$$(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3.$$

**Příklad 4.15:** Najděte nejmenší celé číslo  $k$ , pro něž má rovnice

$$x^2 - 2(k + 2)x + 12 + k^2 = 0$$

dvě různá reálná řešení.

**Příklad 4.16\*:** Nalezněte kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejímž jedním řešením je

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}.$$

**Příklad 4.17\*:** Označme

$$a = \sqrt[3]{3\sqrt{21} + 8}, \quad b = \sqrt[3]{3\sqrt{21} - 8}.$$

Dokažte, že součin i rozdíl těchto dvou reálných čísel je celočíselný a určete jej. Zjednodušte algebraické výrazy pro čísla  $a$  a  $b$  tak, aby obsahovala kromě celých čísel a obvyklých operací již pouze druhé odmocniny.

*Nápověda: Napište si kvadratickou rovnici s dvojicí řešení  $a, -b$ .*