

## M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 3. listopadu 2023.

### 8 Exponenciální a logarimické funkce

Cvičení konaná 6. a 7. 11. 2023.

**Příklad 8.1:** Albert popletl pořadí kvantifikátorů v definici spojitosti. Podle Alberta je funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá v  $x_0$ , jestliže platí

$$\exists \delta > 0 \forall \epsilon > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Napište negaci tohoto definičního výroku a zjistěte, zda jsou následující funkce podle Alberta spojitě v bodě  $x_0 = 3$ :

1.  $f(x) = x$ ,
2.  $f(x) = -1$  pro  $x < 0$  a  $f(x) = 2$  pro  $x \geq 0$ .

Najděte všechny funkce, které jsou podle Alberta v bodě  $x_0 = 3$  spojitě.

**Příklad 8.2:** Mocniny a exponenciální funkce  $a^x$ .

1. Pro  $a > 0$  a  $n \in \mathbb{Z}$  definujte  $a^n$ .
2. Je-li  $a > 1$  reálné číslo a  $n < m$  celá čísla, pak  $a^n < a^m$ . Dokažte.
3. Pro  $a > 0$  reálné a  $x = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  definujte  $a^x$ .
- 4.\* Pro  $a > 0$  reálné a  $x, y$  racionální, dokažte, že  $a^x a^y = a^{x+y}$  a  $(a^x)^y = a^{xy}$ .
5. Pro  $a > 1$  a  $x \in \mathbb{R}$  definujeme  $a^x = \sup\{a^y \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{Q}, y \leq x\}$ . Udělejte totéž pro  $a \in (0, 1)$ .
- 6.\* Dokažte, že funkce  $a^x$  je rostoucí pro  $a > 1$  a klesající pro  $a \in (0, 1)$ .
- 7.\* Pro  $a > 0$  reálné a  $x, y$  reálná, dokažte, že  $a^x a^y = a^{x+y}$  a  $(a^x)^y = a^{xy}$ .
8. Nakreslete graf exponenciální funkce pro různá  $a$ .

**Příklad 8.3:** Logaritmická funkce  $\log_a x$ .

1. Definujte inverzní funkci k funkci  $f$ .
2. Definujte  $\log_a x$  jako inverzní funkci k exponenciální funkci  $a^x$ .
3. Jak je to s monotonií logaritmické funkce? Nakreslete grafy logaritmické funkce pro různé základy.

**Příklad 8.4:** Z vlastností exponenciálních funkcí dokažte tyto vlastnosti logaritmických funkcí:

1.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ .
2.  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ .
3.  $\log_a(x^y) = y \log_a x$ .
4.  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ .
5.  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ .
6.  $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$ .
7.  $\log_{a^y} x^y = \log_a x$ .

Doplňte vždy chybějící předpoklady na použité parametry  $a, b, c, x, y$ .

**Příklad 8.5:** Určete

1.  $49^{1-\frac{1}{2}\log_7 25}$ .
2.  $\log(\log \sqrt{\sqrt[5]{10}})$ .
3.  $81^{\frac{1}{\log_5 3}}$ .
4.  $\log_2 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$ .
5.  $3^{2\log_3 2 + \log_3 5}$ .
6.  $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_4 9} - \frac{1}{\log_8 3}$ .
7.  $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 3^{\log_9 36}$ .