

M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 10. listopadu 2023.

9 Exponenciální a logarimické funkce – dokončení

Cvičení konaná 13. a 14. 11. 2023.

Příklad 9.1: Pomocí čísel a , b , c vyjádřete x :

1. $x = \log_{100} 40$; $a = \log_2 5$.
2. $x = \log_6 16$; $a = \log_{12} 27$.
3. $x = \log \frac{1}{300}$; $a = \log 2$, $b = \log 3$, $c = \log 5$.
4. $x = \log_{140} 63$; $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_7 2$.

Příklad 9.2: Řešte v \mathbb{R} rovnice:

1. $4^x + 2^{x+1} = 24$.
2. $|x|^{x^2-2x} = 1$.
3. $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$.
4. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$.

Příklad 9.3: Řešte v \mathbb{R} rovnice:

1. $\log 5 + \log(x + 10) = 1 - \log(2x - 1) + \log(21x - 20)$.
2. $\log_{0,5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$.
3. $15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5(9x)} = 1$.
4. $\log \sqrt{1+x} + 3 \log \sqrt{1-x} = \log \sqrt{1-x^2} + 2$.

Příklad 9.4: Řešte v \mathbb{R} nerovnice:

1. $\frac{1}{3^{x+5}} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$.
2. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$.
3. $\log_{(x-2)}(2x-3) > \log_{(x-2)}(24-6x)$.
4. $x^{\log_2 x} > 2$.

Příklad 9.5: a) Řešte v \mathbb{R} rovnici $\log_3 x^2 \cdot \log_9 x = 3$.

b) Využijte předchozí výsledek a vyřešte rovnici $\log_3(|z| + 1)^2 \cdot \log_9(|z| + 1) = 3$.

Příprava na druhou vnitrosemestrální písemku

V písemce bude jedna úloha na výroky s kvantifikátory. Další tři úlohy budou analogické úlohám z roku 2021.

1. Řešte v \mathbb{R} rovnici $4 + 2x - x^2 = |x - 1| + |x + 2|$.

2. Řešte v \mathbb{R} nerovnici $\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2} > 1$.

3. Řešte v \mathbb{R} rovnici $8^x + 2 = 4^x + 2^{x+1}$.

4. Určete všechna řešení nerovnice $\log_{x+1}(2x + 1) > 2 + \log_{x+1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)$.

5. Uvažujme funkci f danou předpisem $f(x) = \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x$.

a) Určete definiční obor funkce a zdůvodněte, že funkce je na něm rostoucí.

b) Pro libovolné $n \in \mathbb{R}$ vypočítejte $f(4^n)$. [Výsledek zapište jako polynom v proměnné $n \in \mathbb{Z}$.]

c) Využijte předchozí výsledek a vyřešte rovnici $2 \log_2 x + 2 \log_4 x + 2 \log_8 x + 11 = 0$.

d) Podobně vyřešte nerovnici $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < \log_{16} x^5$.