M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

- Jde o seznam typových úloh, které se probírají na cvičení a dalších obdobných úloh na procvičení za domácí úlohu. Na písemkách se objeví výhradně modifikace příkladů z této sbírky a jim obdobné příklady.
- Příklady označené hvězdičkou jsou určeny pro studenty, kteří by se na cvičení příliš nudili a jsou zde uvedeny pouze jako doplňující příklady, které nebudou obsahem písemek.
- Program jednotlivých cvičení si sestavují vyučující sami a mohou se lišit i v rámci jednotlivých cvičení jednoho vyučujícího.
- Velké množství příkladů je převzato ze sbírky „Seminář ze středoškolské matematiky“ autorů Herman, Kučera, Šimša (skriptum MU, 2004). Dalšími příklady přispěli doc. Čadek, dr. Kruml (oba v roce 2019), doc. Šilhan (2020) a doc. Klíma (2019-2020).

Aktuální verze sbírky ze dne 18. září 2024.

1 Úvodní hodina - zápis množin

Cvičení konaná 23. a 25. 9. 2024.

Příklad 1.1: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech přirozených čísel, která jsou dělitená třemi.
2. Množinu všech celých čísel, která dávají po dělení osmi zbytek 5.
3. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je větší než 3.
4. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je menší než jejich trojnásobek.
5. Množinu všech dvojic reálných čísel, kde první je trojnásobkem druhého.
6. Množinu všech dvojic kladných reálných čísel, kde první je větší než trojnásobek druhého.
7. Množinu všech trojic přirozených čísel, která mohou být délkami stran pravoúhlého trojúhelníka. Je tato množina prázdná?

Řešení: 1) $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$, *2)* $\{8k+5 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, *3)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 3\} = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, *resp.* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{3}\} = (\sqrt{3}, \infty)$, *4)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 < 3x\} = (0,3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3x\}$ *– pro záporná* x *totiž platí* $3x < 0 < x^2$, *5)* $\{[3y, y] \mid y \in \mathbb{R}\} = \{[x, \frac{x}{3}] \mid x \in \mathbb{R}\}$ *– přímka se směrnicí* $\frac{1}{3}$ *procházející počátkem, 6)* $\{[x,y] \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 3y > 0\}$ *– výseč v prvním kvadrantu mezi kladnou částí osy* x *a přímkou* $y = \frac{1}{3}x$, *7)* $\{[x,y,z] \mid x,y,z \in \mathbb{N}, x^2+y^2 = z^2\} \cup \{[x,y,z] \mid x,y,z \in \mathbb{N}, x^2+z^2 = y^2\} \cup \{[x,y,z] \mid x,y,z \in \mathbb{N}, y^2+z^2 = x^2\}$.

Příklad 1.2: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech lichých přirozených čísel, která jsou dělitená 5.
2. Množinu všech dvouciferných celých čísel, která jsou dělitená 17.
3. Množinu všech reálných čísel x, která jsou řešením nerovnice $x^2 + 2x + 1 > 0$.
4. Množinu všech kladných reálných čísel, jejichž třetí mocnina je menší než jejich druhá mocnina.
5. Množinu všech dvojic přirozených čísel, kde první dělí druhé.
6. Množinu všech dvojic celých čísel, která se navzájem dělí, tj. první dělí druhé a naopak.
7. Množinu všech čtveřic celých čísel, kde třetí je součtem prvních dvou a čtvrté je součinem prvních tří.

Řešení: 1) $\{10k+5 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$*, 2) 2)* $\{17k \mid k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, |k| < 6\} = \{\pm 17, \pm 34, \pm 51, \pm 68, \pm 85\}$*, 3)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 > 0\} = \mathbb{R}$*, 4)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^3 < x^2\} = (0, 1)$*, 5)* $\{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{N}, x \mid y\} = \{[x, kx] \mid x, k \in \mathbb{N}\}$*, 6)* $\{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \mid y, y \mid x\} = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| = |y|\} = \{[x, x] \mid x \in \mathbb{Z}\} \cup \{[x, -x] \mid x \in \mathbb{Z}\}$*, 7)* $\{[x, y, x + y, xy(x + y)] \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1.3: Napište formální definice:

1. Celé číslo a je sudé.
2. Celé číslo a je liché.
3. Celé číslo a je dělitelné třemi.
4. Celé číslo a není dělitelné třemi.
5. Celé číslo a je dělitelné číslem b.

Řešení: 1) Existuje $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = 2k$. *2) Existuje* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = 2k + 1$. *3) Existuje* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = 3k$. *4) Nexistuje* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = 3k$. *5) Existuje* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = k \cdot b$.

Příklad 1.4: Dokažte platnost následujících tvrzení pro libovolná celá čísla a a b.

1. Z čísel a, b a $a + b$ je aspoň jedno sudé.
2. Pokud je $a + b$ sudé, pak $a - b$ je sudé.
3. Číslo $a + b$ je sudé právě tehdy, když je sudé číslo $a - b$.

4. Pokud je $a+b$ sudé, pak a^2+b^2 je také sudé.
5. Pokud je $a+b$ liché, pak a^2+b^2 je také liché.
6. Číslo a^2+a je sudé číslo.
7. Číslo a^3-a je dělitelné 3.
8. Číslo a^4-a^2 je dělitelné 4.

Řešení: 1) Pokud a nebo b je sudé, tvrzení platí. Pokud jsou obě lichá, tj. $a=2k+1$ *a* $b=2\ell+1$ *pro vhodná celá čísla* k,ℓ*, potom* $a+b=2(k+\ell+1)$ *je sudé a tvrzení opět platí. 2) Protože* $a-b=(a+b)-2b$*, z předpokladu, že* $a+b$ *je sudé, vidíme, že* $a-b$ *je rozdíl dvou sudých čísel, a tedy sudé číslo. 3) Předchozí je jedna implikace. Pro druhou implikaci „pokud je* $a-b$ *sudé, pak je* $a+b$ *sudé“ se stejným způsobem využije vztah* $a+b=(a-b)+2b$*. 4) i 5) Lze využít vztah* $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$*. 6) Číslo* $a^2+a=a(a+1)$ *je součinem dvou po sobě jdoucích celých čísel, z nichž jedno je sudé. 7) Číslo* $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ *je součinem dvou po sobě jdoucích celých čísel, z nichž jedno je dělitelné 3. 8) Platí* $a^4-a^2=a^2(a^2-1)$*. Pokud je a sudé, pak je* a^2 *dělitelné 4. Pokud je a liché, pak je dělitelné 4 číslo* $a^2-1=(a-1)(a+1)$*. (I v jiných podpříkladech lze použít metodu, že se rozebírají možnosti* $a=2k$ *resp.* $a=2k+1$ *apod.)*

Příklad 1.5: Nechť a,b,c,d jsou různá jednociferná kladná celá čísla taková, že 3 dělí $a^2+b^2+c^2+d^2$. Dokažte, že potom a^2+b^2 není dělitelné 3.

Řešení: Po dělení 3 dává druhá mocnina celého čísla n zbytek 0 (v případě, kdy n je dělitelné 3) nebo 1 (v případě, kdy n není dělitelné 3). Protože jsou naše jednociferná čísla různá, nemohou být všechna čtyři dělitelná 3. Je tedy dělitelné 3 právě jedno z nich. Součet a^2+b^2 *tak po dělení 3 dává zbyek 1 nebo 2.*

Příklad 1.6: V následujících příkladech zapište množinu M bodů v rovině, a pak určete výčtem prvků množinu všech dvojic celých čísel x a y takových, že $[x,y]\in M$.

1. M je obdélník, jehož tři vrcholy jsou $[-2,-2]$, $[-2,0]$ a $[1,-2]$.
2. M je trojúhelník ABC, kde $A=[3,2]$, $B=[1,-2]$ a $C=[-1,1]$.
3. M je množina bodů $[x,y]$ v kruhu se středem $(8,3)$ a poloměrem 4, pro které navíc platí $x\le y$.
4. M je průnik trojúhelníku, jehož vrcholy jsou počátek $[0,0]$ a body $[0,4]$ a $[4,0]$, s množinou všech bodů $[x,y]$, pro které platí $(x-y-2)^2=9$.
5. M je tvořena body (x,y) rovnoběžníku, jehož tři vrcholy jsou $[0,0]$, $[-6,0]$ a $[4,3]$, které zároveň leží pod přímkou $y=x+1$.

Pozn.: Body obdélníku, trojúhelníku atd. míníme body, které jsou buď „uvnitř“ nebo „na hranici“ tohoto útvaru. Rozmyslete si, jak by se řešení lišilo v případě, kdybychom uvažovali pouze „vnitřní“ body.

Řešení: 1) $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, -2 \le x \le 1, -2 \le y \le 0\}$, $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[-2, -2], [-2, -1], [-2, 0], [-1, -2], [-1, -1], [-1, 0], [0, -2], [0, -1], [0, 0], [1, -2], [1, -1], [1, 0]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, -2 < x < 1, -2 < y < 0\}$, $M' \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[-1, -1], [0, -1]\}$. *2)* $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, 3x+2y \ge -1, 2x-y \le 4, x-4y \ge -5\}$, $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[-1, 1], [0, 0], [0, 1], [1, -2], [1, -1], [1, 0], [1, 1], [2, 0], [2, 1], [3, 2]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, 3x + 2y > -1, 2x - y < 4, x - 4y > -5\}$, $M' \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[0, 0], [0, 1], [1, -1], [1, 0], [1, 1], [2, 1]\}$. *3)* $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, (x-8)^2+(y-3)^2 \le 16, x \le y\}$, $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[5, 5], [6, 6]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, (x-8)^2+(y-3)^2 < 16, x \le y\}$, $M' \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[5, 5], [6, 6]\}$. *4)* $M = \{[x, x+1] \mid 0 \le x \le \frac{3}{2}\}$, $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[0, 1], [1, 2]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x, x+1] \mid 0 < x < \frac{3}{2}\}$, $M' \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[1, 2]\}$. *5)* $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, 3x \le 4y, y - x < 1, 0 \le y \le 3\}$, $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$. *Vnitřní body:* $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, 3x < 4y, y - x < 1, 0 < y < 3\}$, $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[1, 1], [2, 2]\}$.

Příklad 1.7: Nechť M je množina bodů v rovině, které jsou uvnitř (tj. nikoli na stranách) čtverce se středem v bodě $[4, 3]$, stranou délky 2, jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné s osami x a y. Napište množinu M formálně (tj. body roviny o souřadnicích, které splňují vhodné nerovnosti). Určete dále všechny body s celočíselnými souřadnicemi, které množina M obsahuje.

Řešení: Délka uhlopříčky je $2\sqrt{2}$*, proto jsou vrcholy čtverce v bodech* $[4 - \sqrt{2}, 3], [4, 3 + \sqrt{2}], [4+\sqrt{2}, 3], [4, 3-\sqrt{2}]$*. Směrové vektory stran jsou* $(1, 1)$ *a* $(1, -1)$ *a jsou na sebe kolmé, proto mají přímky procházející stranou rovnici buď* $x - y = d$ *(pro dvojici stran se směrnicí* $(1, 1)$*), nebo* $x + y = d$ *(pro dvojici stran se směrnicí* $(1, -1)$*), kde vhodné* d *se dopočítá dosazením vrcholů. Dvojice nerovností* $x - y > 1 - \sqrt{2}$, $x - y < 1 + \sqrt{2}$ *(ostré nerovnosti zde jsou, protože nás zajímá vnitřek čtverce bez stran) lze vyjádřit ekvivalentně podmínkou* $|x - y - 1| < \sqrt{2}$*. Podobně dostaneme pro druhou dvojici stran, resp. přímek, podmínku* $|x + y - 7| < \sqrt{2}$*. Proto* $M = \{[x, y]; |x-y-1| < \sqrt{2}, |x+y-7| < \sqrt{2}\}$*. Dále* $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[4, 3], [3, 3], [5, 3], [4, 2], [4, 4]\}$