M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 18. září 2024.

2 Vyhodnocení vstupního testu

Cvičení konaná 30. 9. a 2. 10. 2024.

Příklad 2.1: Nechť $T = [r, s]$ je těžiště $\triangle ABC$, kde $A = [2, -1]$, $B = [-1, 3]$ a $C = [5, 7]$. Určete hodnoty r a s.

Řešení: $r = 2,\ s = 3$.

Příklad 2.2: Nechť $S = 72\,cm^2$ je povrch krychle vepsané do kulové plochy o poloměru r. Určete hodnotu r.

Řešení: $k = 15$.

Příklad 2.3: Nechť M je množina všech reálných čísel, která splňují nerovnici $|2x+1| < x+3$. Určete množinu M.

Řešení: $M = (-\frac{4}{3}, 2)$.

Příklad 2.4: Komplexní číslo z je řešením rovnice $z + |z| = 5 + (2 + i)^2$. Určete komplexní číslo z^2.

Řešení: $z^2 = -7 + 24i$.

Příklad 2.5: Čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jsou řešením rovnice $x^{2\log x + 3,5} = 100\sqrt{x}$. Určete číslo $k = ab^2$.

Řešení: $k = \frac{1}{10}$.

Příklad 2.6: Nechť číslo c je součtem všech řešení rovnice $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ v intervalu $[0, 2\pi]$. Určete hodnotu c.

Řešení: $c = \frac{\pi}{4}$ *(jediné řešení v daném intervalu).*

Příklad 2.7: Určete počet všech lichých pěticiferných přirozených čísel, která neobsahují ve svém zápisu cifru 9.

Řešení: $8 \cdot 9^3 \cdot 4$.

Příklad 2.8: Nechť $c = a^2 + b^2$, kde a a b jsou délky poloos kuželosečky k o rovnici $k\ :\ 3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$. Určete hodnotu c.

Řešení: $c = 8$.

Příklad 2.9: Definujte, co je to aritmetický průměr n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a co je medián těchto čísel. Na příkladech čtyř čísel ukažte, že někdy je medián menší než aritmetický průměr a jindy je tomu naopak.

Řešení: Průměr: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. *Za dodatečného předpokladu* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *je medián roven* $a_{\frac{n+1}{2}}$ *pro liché (nepárne)* n, *resp.* $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ *pro sudé (párne)* n. *Pro čtveřici 1,1,1,5 je medián 1 a průměr 2. Pro čtveřici 1,5,5,5 je medián 5 a průměr 4.*

Příklad 2.10: Pro n-tici kladných reálných čísel se definují kromě aritmetického průměru i jiné průměry. Nejznámější je geometrický a harmonický průměr:

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n},$$
$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a_1, a_2 platí $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$. Pro která a_1, a_2 nastane rovnost? (A značí aritmetický průměr čísel v závorce.)

Řešení: V platné nerovnosti $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ *přičteme (kladné číslo)* $4a_1a_2$ *k oběma stranám a dostaneme* $(a_1+a_2)^2 \geq 4a_1a_2$. *Po odmocnění (opět se využije, že jsou obě* a_1 *i* a_2 *kladná čísla) a podělení dvěma dostaneme nerovnost* $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2)$. *Pokud v této nerovnosti dosadíme* $a_1 = \frac{1}{b_1}$ *a* $a_2 = \frac{1}{b_2}$, *potom po podělení oběma stranami dostaneme* $G(b_1, b_2) \geq H(b_1, b_2)$. *Z postupu je jasné, že pro* $a_1 \neq a_2$ *lze psát nerovnosti ostré. Rovnost tedy nastává právě pro dvojice* $a_1 = a_2$, *kdy* $A(a_1, a_2) = G(a_1, a_2) = H(a_1, a_2) = a_1$.

Příklad 2.11*: Jaká je průměrná rychlost auta, které jede n stejně dlouhých úseků postupně rychlostmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$?

Řešení: $H(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Příklad 2.12*: Nerovnosti z příkladu 2.10 platí nejen pro dvojice, ale pro všechny n-tice kladných reálných čísel. Dokažte, že z nerovnosti $A \geq G$ plyne nerovnost $G \geq H$. Zkuste dokázat nerovnost $A \geq G$.

Řešení: To, že z nerovnosti $A \geq G$ *plyne nerovnost* $G \geq H$ *lze ukázat stejně jako v řešení příkladu 2.10. Elementárně lze nerovnost* $A \geq G$ *dokazovat indukcí, kde pro* $n = 2$ *jsme již provedli v příkladě 2.10. Indukční krok je poměrně jednoduchý pro* $n = 2k$, *kdy se sečtou nerovnosti* $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) = b_1$, $A(a_3, a_4) \geq G(a_3, a_4) = b_2$, $\ldots$, $A(a_{n-1}, a_n) \geq G(a_{n-1}, a_n) = b_k$, *a potom se použije nerovnost* $A(b_1, b_2, \ldots, b_k) \geq G(b_1, \ldots, b_n)$. *Z nerovnosti pro* $n = 2k$ *(kde jsme využili indukční předpoklad pro 2 a* k*), lze volbou* $a_{2k} = A(a_1, \ldots, a_{2k-1})$ *dokázat nerovnost pro* $2k - 1$. *(Poznamenejme, že s jistými znalostmi z matematické analýzy lze dostat nerovnost také takto:* e^x *je konvexní funkce na intervalu* $(0, \infty)$, *proto platí (Jensenova) nerovnost* $e^{\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n})$, *kde levá strana lze psát jako* $\sqrt[n]{e^{x_1} \cdot \cdots \cdot e^{x_n}}$. *Po substutuci* $e^{x_i} = a_i$ *dostnaneme požadovanou nerovnost.)*