

## M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 18. září 2024.

### 2 Vyhodnocení vstupního testu

Cvičení konaná 30. 9. a 2. 10. 2024.

**Příklad 2.1:** Necht'  $T = [r, s]$  je těžiště  $\triangle ABC$ , kde  $A = [2, -1]$ ,  $B = [-1, 3]$  a  $C = [5, 7]$ . Určete hodnoty  $r$  a  $s$ .

**Příklad 2.2:** Necht'  $S = 72 \text{ cm}^2$  je povrch krychle vepsané do kulové plochy o poloměru  $r$ . Určete hodnotu  $r$ .

**Příklad 2.3:** Necht'  $M$  je množina všech reálných čísel, která splňují nerovnici  $|2x+1| < x+3$ . Určete množinu  $M$ .

**Příklad 2.4:** Komplexní číslo  $z$  je řešením rovnice  $z + |z| = 5 + (2 + i)^2$ . Určete komplexní číslo  $z^2$ .

**Příklad 2.5:** Čísla  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , jsou řešením rovnice  $x^{2 \log x + 3,5} = 100\sqrt{x}$ . Určete číslo  $k = ab^2$ .

**Příklad 2.6:** Necht' číslo  $c$  je součtem všech řešení rovnice  $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$  v intervalu  $[0, 2\pi]$ . Určete hodnotu  $c$ .

**Příklad 2.7:** Určete počet všech lichých pěticiferných přirozených čísel, která neobsahují ve svém zápisu cifru 9.

**Příklad 2.8:** Necht'  $c = a^2 + b^2$ , kde  $a$  a  $b$  jsou délky poloos kuželosečky  $k$  o rovnici  $k : 3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$ . Určete hodnotu  $c$ .

**Příklad 2.9:** Definujte, co je to aritmetický průměr  $n$ -tice reálných čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$  a co je medián těchto čísel. Na příkladech čtyř čísel ukažte, že někdy je medián menší než aritmetický průměr a jindy je tomu naopak.

**Příklad 2.10:** Pro  $n$ -tici kladných reálných čísel se definují kromě aritmetického průměru i jiné průměry. Nejznámější je geometrický a harmonický průměr:

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$
$$H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla  $a_1, a_2$  platí  $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$ . Pro která  $a_1, a_2$  nastane rovnost? ( $A$  značí aritmetický průměr čísel v závorce.)

**Příklad 2.11\*:** Jaká je průměrná rychlost auta, které jede  $n$  stejně dlouhých úseků postupně rychlostmi  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ?

**Příklad 2.12\*:** Nerovnosti z příkladu 2.10 platí nejen pro dvojice, ale pro všechny  $n$ -tice kladných reálných čísel. Dokažte, že z nerovnosti  $A \geq G$  plyne nerovnost  $G \geq H$ . Zkuste dokázat nerovnost  $A \geq G$ .