M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 18. září 2024.

4 Monotonie a kvadratické funkce

Cvičení konaná 14. 10. a 16. 10. 2024.

Příklad 4.1:

1. Definujte (formálně) pojem „funkce f je rostoucí na intervalu I“.
2. Definujte formálně „maximální interval, kde je funkce f rostoucí“.
3. U funkcí z příkladů 3.1, 3.2 a 3.4 zjistěte, na kterých maximálních intervalech jsou rostoucí, resp. klesající.
4. Zformulujte precizně tvrzení, že složení rostoucích funkcí (na intervalu) je rostoucí funkce (na intervalu) a větu dokažte. Zejména si uvědomte, jaké všechny předpoklady je třeba uvést. Přesněji: pokud g je rostoucí funkce na intervalu I, kde $I \subseteq D(g)$, a dále f je rostoucí funkce na intervalu $J \subseteq D(f)$, potom ještě musíme něco předpokládat o množině $\{g(x); x \in I\}$, abychom mohli dokázat, že $f \circ g$ je rostoucí na intevalu I.

*Řešení: 1) Funkce f je rostoucí na intervalu I jestliže $(\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$. 2) I je maximální interval, kde je funkce f rostoucí, jestliže (i) funkce f je rostoucí na I a (ii) pro libovolný interval J obsahující množinu I, na kterém je f rostoucí, platí $J = I$. 3) Ad **??**: **??**.1: Rostoucí na celém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$. **??**.2: Maximální interval, kde je funkce rostoucí, je $[-\frac{1}{3}, \infty)$. Maximální interval, kde je funkce klesající, je $(-\infty, -\frac{1}{3}]$. **??**.3: Maximální intervaly, kde je funkce klesající, jsou $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$. **??**.4: Maximální interval, kde je funkce klesající, je $(-\infty, -1]$. Maximální interval, kde je funkce rostoucí, je $[-1, \infty)$. **??**.5: Rostoucí na celém definičním oboru $D(f) = (-2, \infty)$. **??**.6: Rostoucí na celém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$. **??**.7: Maximální interval, kde je funkce klesající, je $(-\infty, -\frac{1}{2}]$. Maximální interval, kde je funkce rostoucí, je $[-\frac{1}{2}, \infty)$. **??**.8: Maximální intervaly, kde je funkce rostoucí, jsou $I_k = [(2k-1)\pi, 2k\pi]$, kde k je libovolné celé číslo. Maximální intervaly, kde je funkce klesající, jsou $J_k = [2k\pi, (2k+1)\pi]$, kde k je libovolné celé číslo. **??**.9: Maximální intervaly, kde je funkce klesající, jsou $I_k = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Ad **??**: Funkce je sudá a stačí si tedy rozmyslet v kladné části definičního oboru. Maximální intervaly, kde je f je klesající jsou $(1, \sqrt{11})$ a $(\sqrt{11}, \infty)$, Proto maximální intervaly, kde je f rostoucí, jsou $(-\infty, -\sqrt{11})$ a $(-\sqrt{11}, -1)$. Ad **??**: Intervaly zmíněné v řešení příkladu **??** jsou maximální intervaly, kde je funkce monotónní. 4) Tvrzení: pokud g je rostoucí funkce na intervalu I, kde $I \subseteq D(g)$, a dále f je rostoucí funkce na intervalu $J \subseteq D(f)$ taková, že $H_I(g) = \{g(x); x \in I\} \subseteq J$, potom $f \circ g$ je rostoucí na intevalu I. Důkaz: pokud $x_1, x_2 \in I$ takové,* *že $x_1 < x_2$, potom (protože g je rostoucí na I) $g(x_1) < g(x_2)$. Odtud (protože $g(x_1), g(x_2) \in J$ a f je rostoucí na J) dostáváme $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$.*

Příklad 4.2: Nakreslete graf funkce

$$f(x) = 2\cos(3x + \frac{\pi}{2}) - 1.$$

Určete všechny maximální intervaly, na nichž je funkce klesající (resp. rostoucí). Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$. Určete zejména, kolik je takových reálných čísel v intervalu $(0, 2\pi)$.

Řešení: Maximální intervaly monotonie: pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je f klesající na intervalu $I_k = [\frac{2}{3}\pi k - \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{6}]$ a rostoucí na intervalu $J_k = [\frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{2}]$. Množina všech řešení rovnice $f(x) = 0$ je je $\{\frac{2}{3}\pi k + \frac{11}{18}\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2}{3}\pi k + \frac{7}{18}\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, 6 řešení leží v intervalu $(0, 2\pi)$, a to $\frac{7}{18}\pi$, $\frac{11}{18}\pi$, $\frac{19}{18}\pi$, $\frac{23}{18}\pi$, $\frac{31}{18}\pi$ a $\frac{35}{18}\pi$.

Příklad 4.3: Mějme funkci

$$f(x) = \frac{1}{|e^{2x-1} - 1|}.$$

Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete, na kterých maximálních intervalech je tato funkce rostoucí nebo klesající.

Řešení: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $H(f) = (0, \infty)$. Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ a klesající na intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$. [Graf zhruba vypadá jako hyperbola, která má levou větev překlopenou do druhého kvadrantu a posunutou o 1 směrem nahoru, a obě větve posunuté doprava, neboť funkce není definovaná v bodě $\frac{1}{2}$ – pro doplnění uveďme, že $\lim_{x\to-\infty} = 1$, $\lim_{x\to 1/2} = \infty$, $\lim_{x\to\infty} = 0$.]

Příklad 4.4: Nechť f a g jsou rostoucí funkce na intervalu I, tj. zejména $I \subseteq D(f) \cap D(g)$. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = f(x) + g(x)$,
2. $h(x) = f(x) - g(x)$,
3. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$,
4. $h(x) = -g(x)$,
5. $h(x) = g(x) \cdot g(x)$,
6. $h(x) = |g(x)|$,
7. $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

V případech, kdy odpovídáte „ano“, se pokuste o formální důkaz. V případech, kdy odpovídáte „ne“, dejte protipříklad a navíc se pokuste (přidáním vhodných předpokladů pro funkce f a g) zformulovat platné tvrzení.

Řešení: 1) Rostoucí. 2) Volbou $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ (případně naopak) vidíme, že h není rostoucí, ani klesající. Nejde ani přirozeně opravit/doplnit. 3) Volbou $f(x) = x$, $g(x) = x$ vidíme, že h není rostoucí, ani klesající. Lze opravit: pokud $H(f) \subseteq (0, \infty), H(g) \subseteq (0, \infty)$, pak je h rostoucí. 4) Klesající. 5) viz 3. 6) Volbou $g(x) = x$ vidíme, že h není rostoucí, ani klesající. Rozumný předpoklad na doplnění $H(g) \subseteq (0, \infty)$, aby h bylo rostoucí, tvrzení trivializuje, protože potom $g = h$. Podobně $H(g) \subseteq (-\infty, 0)$ vede ke klesající funkci popsané předpisem v části 4. 7) Volbou $g(x) = x$ vidíme, že h není rostoucí, ani klesající. Lze opravit: pokud $H(g) \subseteq (0, \infty)$, pak je h klesající.

Příklad 4.5: Nechť g je rostoucí funkce na intervalu I, tj. zejména $I \subseteq D(g)$ a nechť $c \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené reálné číslo. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = g(x) + c$,
2. $h(x) = c - g(x)$,
3. $h(x) = c \cdot g(x)$.

Pozor, odpověď se může lišit v závislosti na paramatru c.

Řešení: 1) Rostoucí. 2) Klesající. 3) Pro $c > 0$ je h rostoucí; pro $c < 0$ je h klesající. (Pro $c = 0$ je h konstantní funkce.)

Příklad 4.6: Udejte příklad rostoucích funkcí f a g s definičním oborem $\mathbb{R}$ takových, že funkce h, daná předpisem $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, je klesající funkce na celém definičním oboru $D(h) = \mathbb{R}$.

Nápověda: Pokuste se nejdříve načrtnout grafy vašich funkcí f, g a h. Poté se pokuste vymyslet nějaký vhodný předpis pro tyto funkce (jako složení elementárních funkcí).

Řešení: $f(x) = g(x) = \frac{-1}{2^x}$, $h(x) = \frac{1}{4^x}$.

Příklad 4.7: Nechť f je rostoucí funkce na celém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$ s oborem hodnot $H(f) = (0, \infty)$. Uvažujme dále funkci g danou předpisem $g(x) = x \cdot f(x)$. Dokažte, že funkce g je rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$.

V důkazu identifikujte krok, kde se využije předpoklad $H(f) = (0, \infty)$, a dále krok, kde se využije předpoklad, že I obsahuje pouze kladná reálná čísla.

Ukažte, že oba tyto předpoklady jsou nutné. Zejména dejte příklad rostoucí funkce f s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$, takové, že $H(f)$ obsahuje 0 nebo záporné číslo, pro niž funkce $g(x) = x \cdot f(x)$ není rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$. Poté zformulujte podobně tvrzení o existenci funkce f v druhém případě a dejte vhodný příklad takové funkce.

Řešení: Pro libovolné $x_1, x_2 \in I$, splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$. Protože $x_1 > 0$ dostáváme $x_1 \cdot f(x_1) < x_1 \cdot f(x_2)$. Z $x_1 < x_2$ dostáváme také, vzhledem k předpokladu $f(x_2) > 0$, nerovnost $x_1 \cdot f(x_2) < x_2 \cdot f(x_2)$. Tedy celkem $g(x_1) = x_1 \cdot f(x_1) < x_1 \cdot f(x_2) < x_2 \cdot f(x_2) = g(x_2)$.

Protipříklady: (i) $f(x) = x - 2$ (zde $H(f)$ obsahuje záporná čísla), přitom $g(0) = 0$, $g(1) = -1$, (ii) $f(x) = 2^x$ (zde $I = D(f) = \mathbb{R}$)), přitom $g(-2) = -\frac{1}{2} = g(-1)$.

Příklad 4.8: Pomocí úpravy na čtverec odvoďte "vzoreček" pro řešení obecné kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Načrtněte graf kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ pro $a > 0$ a pro $a < 0$. Určete, jaké maximum nebo minimum tato funkce nabývá a v kterém bodě.

Řešení: $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$. *Odtud při označení $D = b^2 - 4ac$ dostaneme $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$ a dále vzoreček $x = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Parabola je otočená („otevřená“) nahoru pro kladná a, resp. dolů pro záporná a. „Vrchol“ paraboly je v bodě $[\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}]$, tj. minimum/maximum je $\frac{4ac-b^2}{4a} = c - \frac{b^2}{4a}$, kterého nabývá v bodě $\frac{-b}{2a}$.*

Příklad 4.9: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby daná nerovnost platila pro všechna $x \in A$. (Kreslete si, jak musí vypadat grafy příslušných kvadratických funkcí.)

a) $(r + 4)x^2 - 2rx + 2r - 6 < 0$, $A = \mathbb{R}$.

b) $rx^2 - 4x + 3r + 1 > 0$, $A = (0, \infty)$.

c) $(r - 2)x^2 + rx + 1 - r > 0$, $A = (0, \infty)$.

d) $(x - 3r)(x - r - 3) < 0$, $A = [1, 3]$.

Řešení: a) $r \in (-\infty, -6)$, b) $r \in (1, \infty)$, c) nemá řešení, d) $r \in (0, 1/3)$.

Příklad 4.10: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost $(r-2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$, platila pro všechna $x \in [3, 5]$.

Řešení: (i) V případě $r > 2$ je grafem funkce $f(x) = (r - 2)x^2 + rx + 3r + 2$ parabola „otevřená nahoru“ (funkce je konvexní) a vzhledem k tomu, že má všechny koeficienty (tj. $r - 2$, r a $3r + 2$) kladné, tak nabývá funkce f na intervalu $(0, \infty)$ kladných hodnot. Tím spíše platí nerovnost $(r - 2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$ pro všechna $x \in [3, 5]$. (ii) V případě $r = 2$ je funkce $f(x) = 2x + 8$ a nerovnost $2x + 8 > 0$ opět platí dokonce pro všechna kladná reálná čísla. (iii) V případě $r < 2$ je grafem funkce $f(x) = (r - 2)x^2 + rx + 3r + 2$ parabola „otevřená dolů“ (funkce je konkávní). Proto je podmínka „$\forall x \in [3, 5] : f(x) > 0$“ ekvivalentní podmínce „$f(3) > 0 \wedge f(5) > 0$“. Po dosazení dostanem požadavky $15r - 16 > 0$ a $33r - 48 > 0$ a tedy $r \in (\frac{16}{11}, 2)$ (protože řešíme případ (iii) a $\frac{16}{15} < \frac{48}{33} = \frac{16}{11}$). Celková odpověď (spojením všech tří možností výše) je: $r > \frac{16}{11}$.

Příklad 4.11: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost

$$(rx - 1)(x + r) < 0$$

platila pro všechna $x \in A$.

a) $A = (0, 1)$.

b) $A = (-1, 1)$.

c) $A = (-2, 2)$.

d) $A = (0, \infty)$.

Řešení: a) $r \in [0, 1]$, b) $r = 1$, c) nemá řešení, d) $r = 0$.

Příklad 4.12: Určete, kdy pro řešení $x_1 \leq x_2$ rovnice

$$2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$$

platí $x_1 < a < x_2$. *Nápověda: Vyznačte na grafu příslušné kvadratické funkce její hodnotu v a.*

Řešení: $a \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$.

Příklad 4.13: Určete, kdy pro řešení x_1 a x_2 rovnice

$$(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$$

platí $x_1 > 3$ a $x_2 < 2$.

Řešení: $a \in (2, 5)$.

Příklad 4.14: Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má následující polynom dvojnásobný kořen

$$(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3.$$

Řešení: $a = 4$.

Příklad 4.15: Najděte nejmenší celé číslo k, pro něž má rovnice

$$x^2 - 2(k + 2)x + 12 + k^2 = 0$$

dvě různá reálná řešení.

Řešení: $k = 3$, diskriminant $D = 16(k - 2)$.

Příklad 4.16*: Nalezněte kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejímž jedním řešením je

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}.$$

Řešení: $x_1 = 4 - \sqrt{15}, x_2 = 4 + \sqrt{15}$, rovnice $x^2 - 8x + 1 = 0$.

Příklad 4.17*: Označme

$$a = \sqrt[3]{3\sqrt{21} + 8}, \quad b = \sqrt[3]{3\sqrt{21} - 8}\ .$$

Dokažte, že součin i rozdíl těchto dvou reálných čísel je celočíselný a určete jej. Zjednodušte algebraické výrazy pro čísla a a b tak, aby obsahovala kromě celých čísel a obvyklých operací již pouze druhé odmocniny.

Nápověda: Napište si kvadratickou rovnici s dvojicí řešení a, $-b$.

Řešení: $ab = 5$, $a - b = 1$. Potom $a = \frac{\sqrt{21}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$.