M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 18. září 2024.

4 Monotonie a kvadratické funkce

Cvičení konaná 14. 10. a 16. 10. 2024.

Příklad 4.1:

1. Definujte (formálně) pojem „funkce f je rostoucí na intervalu I“.
2. Definujte formálně „maximální interval, kde je funkce f rostoucí“.
3. U funkcí z příkladů 3.1, 3.2 a 3.4 zjistěte, na kterých maximálních intervalech jsou rostoucí, resp. klesající.
4. Zformulujte precizně tvrzení, že složení rostoucích funkcí (na intervalu) je rostoucí funkce (na intervalu) a větu dokažte. Zejména si uvědomte, jaké všechny předpoklady je třeba uvést. Přesněji: pokud g je rostoucí funkce na intervalu I, kde $I \subseteq D(g)$, a dále f je rostoucí funkce na intervalu $J \subseteq D(f)$, potom ještě musíme něco předpokládat o množině $\{g(x); x \in I\}$, abychom mohli dokázat, že $f \circ g$ je rostoucí na intevalu I.

Příklad 4.2: Nakreslete graf funkce

$$f(x) = 2\cos(3x + \frac{\pi}{2}) - 1.$$

Určete všechny maximální intervaly, na nichž je funkce klesající (resp. rostoucí). Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$. Určete zejména, kolik je takových reálných čísel v intervalu $(0, 2\pi)$.

Příklad 4.3: Mějme funkci

$$f(x) = \frac{1}{|e^{2x-1} - 1|}\,.$$

Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete, na kterých maximálních intervalech je tato funkce rostoucí nebo klesající.

Příklad 4.4: Nechť f a g jsou rostoucí funkce na intervalu I, tj. zejména $I \subseteq D(f) \cap D(g)$. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = f(x) + g(x)$,
2. $h(x) = f(x) - g(x)$,

3. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$,
4. $h(x) = -g(x)$,
5. $h(x) = g(x) \cdot g(x)$,
6. $h(x) = |g(x)|$,
7. $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

V případech, kdy odpovídáte „ano“, se pokuste o formální důkaz. V případech, kdy odpovídáte „ne“, dejte protipříklad a navíc se pokuste (přidáním vhodných předpokladů pro funkce f a g) zformulovat platné tvrzení.

Příklad 4.5: Nechť g je rostoucí funkce na intervalu I, tj. zejména $I \subseteq D(g)$ a nechť $c \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené reálné číslo. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = g(x) + c$,
2. $h(x) = c - g(x)$,
3. $h(x) = c \cdot g(x)$.

Pozor, odpověď se může lišit v závislosti na paramatru c.

Příklad 4.6: Udejte příklad rostoucích funkcí f a g s definičním oborem $\mathbb{R}$ takových, že funkce h, daná předpisem $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, je klesající funkce na celém definičním oboru $D(h) = \mathbb{R}$.

Nápověda: Pokuste se nejdříve načrtnout grafy vašich funkcí f, g a h. Poté se pokuste vymyslet nějaký vhodný předpis pro tyto funkce (jako složení elementárních funkcí).

Příklad 4.7: Nechť f je rostoucí funkce na celém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$ s oborem hodnot $H(f) = (0, \infty)$. Uvažujme dále funkci g danou předpisem $g(x) = x \cdot f(x)$. Dokažte, že funkce g je rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$.

V důkazu identifikujte krok, kde se využije předpoklad $H(f) = (0, \infty)$, a dále krok, kde se využije předpoklad, že I obsahuje pouze kladná reálná čísla.

Ukažte, že oba tyto předpoklady jsou nutné. Zejména dejte příklad rostoucí funkce f s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$, takové, že $H(f)$ obsahuje 0 nebo záporné číslo, pro niž funkce $g(x) = x \cdot f(x)$ není rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$. Poté zformulujte podobně tvrzení o existenci funkce f v druhém případě a dejte vhodný příklad takové funkce.

Příklad 4.8: Pomocí úpravy na čtverec odvoďte "vzoreček" pro řešení obecné kvadratické rovnice
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Načrtněte graf kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ pro $a > 0$ a pro $a < 0$. Určete, jaké maximum nebo minimum tato funkce nabývá a v kterém bodě.

Příklad 4.9: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby daná nerovnost platila pro všechna $x \in A$. (Kreslete si, jak musí vypadat grafy příslušných kvadratických funkcí.)

a) $(r + 4)x^2 - 2rx + 2r - 6 < 0$, $A = \mathbb{R}$.

b) $rx^2 - 4x + 3r + 1 > 0$, $A = (0, \infty)$.

c) $(r - 2)x^2 + rx + 1 - r > 0$, $A = (0, \infty)$.

d) $(x - 3r)(x - r - 3) < 0$, $A = [1, 3]$.

Příklad 4.10: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost $(r - 2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$, platila pro všechna $x \in [3, 5]$.

Příklad 4.11: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost
$$(rx - 1)(x + r) < 0$$
platila pro všechna $x \in A$.

a) $A = (0, 1)$.

b) $A = (-1, 1)$.

c) $A = (-2, 2)$.

d) $A = (0, \infty)$.

Příklad 4.12: Určete, kdy pro řešení $x_1 \leq x_2$ rovnice
$$2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$$
platí $x_1 < a < x_2$. *Nápověda: Vyznačte na grafu příslušné kvadratické funkce její hodnotu v a.*

Příklad 4.13: Určete, kdy pro řešení x_1 a x_2 rovnice
$$(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$$
platí $x_1 > 3$ a $x_2 < 2$.

Příklad 4.14: Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má následující polynom dvojnásobný kořen

$$(2a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3.$$

Příklad 4.15: Najděte nejmenší celé číslo k, pro něž má rovnice

$$x^2 - 2(k+2)x + 12 + k^2 = 0$$

dvě různá reálná řešení.

Příklad 4.16*: Nalezněte kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejímž jedním řešením je

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

Příklad 4.17*: Označme

$$a = \sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}, \quad b = \sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}\ .$$

Dokažte, že součin i rozdíl těchto dvou reálných čísel je celočíselný a určete jej. Zjednodušte algebraické výrazy pro čísla a a b tak, aby obsahovala kromě celých čísel a obvyklých operací již pouze druhé odmocniny.

Nápověda: Napište si kvadratickou rovnici s dvojicí řešení a, $-b$.