M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 30. října 2024.

5 Funkce s absolutní hodnotou a odmocninami

Cvičení konaná 30. 10. 2024.

Příklad 5.1: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) = |2x - 3| - |x + 2| + |10 - 3x| - 1\,.$$

1. Nakreslete graf funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na intervalu $[-5, 5]$.
2. Najděte obor hodnot funkce f.
3. Určete maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní.
4. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) < 2$.

Řešení: 2) $H(f) = [-\frac{8}{3}, \infty)$. *3) Klesající na intervalu* $(-\infty, \frac{10}{3}]$, *rostoucí na intervalu* $[\frac{10}{3}, \infty)$. *4)* $\{x \in \mathbb{R}; f(x) < 2\} = (\frac{4}{3}, \frac{9}{2})$.

Příklad 5.2: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice

1. $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = |x + 2|$,
2. $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} = 1$
3. $|x^2 - 4x - 5| - 3 = x^2 + |x - 4|$.

Řešení: 1) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. *2)* $x \in \{-2/3, 1/2, 2\}$. *3)* $x \in \{-4, 1/2, 2\}$.

Příklad 5.3: Uvažujme dvě funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisy

$$f(x) = \big|\,|x + 1| + |x - 1|\,\big|\,, \qquad g(x) = \big|\,|x + 1| - |x - 1|\,\big|\,.$$

1. Načrtněte grafy funkcí f a g.
2. Najděte obor hodnot těchto funkcí.
3. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f rostoucí, resp. klesající.
4. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce g rostoucí, resp. klesající.

5. Určete všechna řešení nerovnice $g(x) < f(x)$, tj.

$$\big| |x+1| - |x-1| \big| \; < \; \big| |x+1| + |x-1| \big| .$$

Řešení: 1) Pro $x \in (-\infty, -1]$ je $f(x) = -2x$, pro $x \in [-1, 1]$ je $f(x) = 2$, pro $x \in [1, \infty)$ je $f(x) = 2x$. Pro $x \in (-\infty, -1]$ je $g(x) = 2$, pro $x \in [-1, 1]$ je $g(x) = |2x|$, pro $x \in [1, \infty)$ je $f(x) = 2$. 2)$H(f) = [2, \infty)$, $H(g) = [0, 2]$. 3) Maximální interval, kde je funkce f klesající je $(-\infty, -1]$. Maximální interval, kde je funkce f rostoucí je $[1, \infty)$. 4) Maximální interval, kde je funkce g klesající je $[-1, 0]$. Maximální interval, kde je funkce f rostoucí je $[0, 1]$. 5) Nerovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ kromě čísel $-1, 1$ (pro něž platí $f(-1) = g(-1) = 2 = f(1) = g(1)$).

Příklad 5.4*: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\left| x + \frac{1}{x+1} \right| \geq 1.$$

Řešení: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$