

M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení
Aktuální verze sbírky ze dne 30. října 2024.

5 Funkce s absolutní hodnotou a odmocninami

Cvičení konaná 30. 10. 2024.

Příklad 5.1: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) = |2x - 3| - |x + 2| + |10 - 3x| - 1.$$

1. Nakreslete graf funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[-5, 5]$.
2. Najděte obor hodnot funkce f .
3. Určete maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní.
4. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) < 2$.

Příklad 5.2: Řešte v \mathbb{R} rovnice

1. $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = |x + 2|$,
2. $\frac{|x^2 - 4x + 3|}{x^2 + |x - 5|} = 1$
3. $|x^2 - 4x - 5| - 3 = x^2 + |x - 4|$.

Příklad 5.3: Uvažujme dvě funkce $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisy

$$f(x) = ||x + 1| + |x - 1||, \quad g(x) = ||x + 1| - |x - 1||.$$

1. Načrtněte grafy funkcí f a g .
2. Najděte obor hodnot těchto funkcí.
3. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f rostoucí, resp. klesající.
4. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce g rostoucí, resp. klesající.
5. Určete všechna řešení nerovnice $g(x) < f(x)$, tj.

$$||x + 1| - |x - 1|| < ||x + 1| + |x - 1||.$$

Příklad 5.4*: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\left| x + \frac{1}{x + 1} \right| \geq 1.$$