M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 11. listopadu 2024.

7 Řešení písemky a exponenciální a logarimické funkce

Cvičení konaná 11.11. a 13.11. 2024.

Příklad 7.1: Mocniny a exponenciální funkce a^x.

1. Pro $a > 0$ a $n \in \mathbb{Z}$ definujte a^n.
2. Je-li $a > 1$ reálné číslo a $n < m$ celá čísla, pak $a^n < a^m$. Dokažte.
3. Pro $a > 0$ reálné a $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ definujte a^x.

4.* Pro $a > 0$ reálné a x, y racionální, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.

5. Pro $a > 1$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme $a^x = \sup\{a^y \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{Q}, y \leq x\}$. Udělejte totéž pro $a \in (0, 1)$.

6.* Dokažte, že funkce a^x je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a \in (0, 1)$.

7.* Pro $a > 0$ reálné a x, y reálná, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.

8. Nakreslete graf exponenciální funkce pro různá a.

Řešení: Většina podpříkladů je značně náročná. Rozhodně příklad přesahuje požadavky k ukončení tohoto předmětu, a proto nebude tento typ příkladu v písemkách.

Příklad 7.2: Logaritmická funkce $\log_a x$.

1. Definujte inverzní funkci k funkci f.
2. Definujte $\log_a x$ jako inverzní funkci k exponenciální funkci a^x.
3. Jak je to s monotonií logaritmické funkce? Nakreslete grafy logaritmické funkce pro různé základy.

Příklad 7.3: Z vlastností exponenciálních funkcí dokažte tyto vlastnosti logaritmických funkcí:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
3. $\log_a(x^y) = y \log_a x$.
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
6. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.
7. $\log_{a^y} x^y = \log_a x$.

Doplňte vždy chybějící předpoklady na použité parametry a, b, c, x, y.

Řešení: 1) Předpoklady: $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x, y \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x, a^\ell = y$. *Potom* $\log_a(xy) = \log_a(a^k \cdot a^\ell) = \log_a(a^{k+\ell}) = k + \ell = \log_a x + \log_a y$. *Jde tedy o přímý důsledek prvního vztahu z 8.1.-7). 2) Předpoklady:* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x, y \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x, a^\ell = y$. *Potom* $\log_a \frac{x}{y} = \log_a(\frac{a^k}{a^\ell}) = \log_a(a^{k-\ell}) = k - \ell = \log_a x - \log_a y$. *3) Předpoklady:* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $x \in (0,\infty)$ $y \in \mathbb{R}$. *Důkaz: Označme* $k \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x$. *Potom* $\log_a(x^y) = \log_a((a^k)^y) = \log_a(a^{yk}) = yk = y \log_a x$. *Jde tedy o přímý důsledek druhého vztahu z 8.1.-7). 4) Předpoklady:* $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x, b^\ell = a$. *Potom* $\log_b x = \log_b(a^k) = \log_b((b^\ell)^k) = \log_b(b^{k\ell}) = k \cdot \ell = \log_a x \cdot \log_b a$. *Podělením* $\log_b a = \ell \neq 0$ *(uvědomte si, že* $\log_b a = 0$ *by znamenalo* $a = 1$*) dostáváme požadované. 5) Předpoklady:* $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$. *Důkaz: Stačí v předchozím zvolit* $x = b$. *6) Předpoklady:* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $b, c \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = b, a^\ell = c$. *Potom* $b^{\log_a c} = b^\ell = (a^k)^\ell = (a^\ell)^k = c^k = c^{\log_a b}$. *7) Předpoklady:* $a, y \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x \in (0,\infty)$. *Důkaz: Podle 4)* $\log_{a^y} x^y = \frac{\log_a x^y}{\log_a a^y}$, *což se s využitím 3) dále rovná* $\frac{y \cdot \log_a x}{y} = \log_a x$.

Příklad 7.4: Určete

1. $49^{1-\frac{1}{2}\log_7 25}$.
2. $\log\left(\log\sqrt{\sqrt[5]{10}}\right)$.
3. $81^{\frac{1}{\log_5 3}}$.
4. $\log_2 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$.
5. $3^{2\log_3 2 + \log_3 5}$.

6. $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_4 9} - \frac{1}{\log_8 3}$.

7. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 3^{\log_9 36}$.

Řešení: 1) $\frac{49}{25}$. *2)* -1. *3)* 625. *4)* 0. *5)* 20. *6)* $-\log_3 2$. *7)* 24.

Příklad 7.5: Pomocí čísel a, b, c vyjádřete x:

1. $x = \log_{100} 40; \quad a = \log_2 5$.
2. $x = \log_6 16; \quad a = \log_{12} 27$.
3. $x = \log \frac{1}{300}; \quad a = \log 2,\ b = \log 3,\ c = \log 5$.
4. $x = \log_{140} 63; \quad a = \log_2 3,\ b = \log_3 5,\ c = \log_7 2$.

Řešení: 1) $\frac{a+3}{2+2a}$. *2)* $\frac{4(3-a)}{3+a}$. *3)* $-(2a+b+2c)$. *4)* $\frac{2ac+1}{abc+2c+1}$.

Příklad 7.6: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $4^x + 2^{x+1} = 24$.
2. $|x|^{x^2-2x} = 1$.
3. $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$.
4. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$.

Řešení: 1) 2. *2)* -1, 1, 2. *3)* 1, -1. *4) 1 (lze snadno ukázat, že má právě jedno řešení).*

Příklad 7.7: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $\log 5 + \log(x+10) = 1 - \log(2x-1) + \log(21x-20)$.
2. $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$.
3. $15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5(9x)} = 1$.
4. $\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = \log\sqrt{1-x^2} + 2$.

Řešení: 1) $3/2$, 10. *2)* $\sqrt{2}/2$, 1, 4. *3)* $1/15$, $1/3$. *4) nemá řešení.*

Příklad 7.8: Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

1. $\frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$.
2. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$.
3. $\log_{(x-2)}(2x-3) > \log_{(x-2)}(24-6x)$.
4. $x^{\log_2 x} > 2$.

Řešení: 1) $(-1, 1]$*. 2)* $(-\infty, 0)$*. 3)* $(2, 3) \cup (27/8, 4)$*. 4)* $(0, 1/2) \cup (2, \infty)$*.*

Příklad 7.9: a) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\log_3 x^2 \cdot \log_9 x = 3$.
b) Využijte předchozí výsledek a vyřešte rovnici $\log_3(|z|+1)^2 \cdot \log_9(|z|+1) = 3$.
Řešení: a) $x = 3^{\sqrt{3}}$ *nebo* $x = 3^{-\sqrt{3}}$*. b)* $z = 3^{\sqrt{3}} - 1$ *a* $z = -3^{\sqrt{3}} + 1$*.*