M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 20. listopadu 2024.

8 Goniometrické funkce

Cvičení konaná 18. a 20. 11. 2024.

Příklad 8.1: Odvoďte základní vztahy:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
2. $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,
3. $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$,
4. $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$,
5. $\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x), \quad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$.
6. $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \quad \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

Příklad 8.2*: Předpokládejme, že platí $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, kde x je libovolné reálné číslo. Dále předpokládejme, že pro umocňování reálného čísla e na komplexní čísla platí obvyklé vlastnosti pro umocňování. Odvoďte součtové vzorce

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,.$$

Součtových vzorců využijte k odvození vzorců (e) a (f) z předchozího příkladu.

Příklad 8.3: Odvoďte dále vztahy:

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
2. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
3. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Nápověda: V částech 2. a 3. napište $x = \alpha + \beta$ a $y = \alpha - \beta$ a použijte součtové vzorce.

Příklad 8.4: Za předpokladu, že výrazy dávají smysl, dokažte následující rovnosti. Popište, pro které hodnoty tyto rovnosti platí.

1. $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$,
2. $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$,
3. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$.

Nápověda: 1) Ve vztahu $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$ *použijte součtové vzorce pro* $\sin(x+y)$ *a* $\cos(x+y)$*. 2) Ve vztahu* $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$ *použijte součtové vzorce pro* $\sin(x-y)$ *a* $\cos(x-y)$*. 3) Ve výrazu* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$ *použijte vzorce pro sin*$(\frac{\pi}{2}+x)$ *a cos*$(\frac{\pi}{2}+x)$*.*

Řešení: 1) Rovnost platí pokud $\{x, y, x+y\} \cap \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$*. 2) Rovnost platí pokud* $\{x, y, x-y\} \cap \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$*. 3) Rovnost platí pro* $x \neq \frac{\pi k}{2} + k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Příklad 8.5: Odvoďte následující vztahy (a promyslete, pro které hodnoty $x \in \mathbb{R}$ platí):

1. $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$,
2. $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$,
3. $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

Nápověda: Ve všech případech na pravé straně použijte $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$ *a následně upravte složený zlomek.*

Řešení: Ve všech případech musí platit $x \neq (2k+1)\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$*. V případě 3. navíc* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Příklad 8.6: **a)** Za předpokladu, že výrazy na obou stranách rovnosti dávají smysl, dokažte:

$$\sin 2x = \frac{4 \operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x}.$$

b) Určete, pro která reálná čísla x mají výrazy smysl.

Řešení: a) Samozřejmě použijeme známé vztahy $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ *a* $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$*. Připomeňme vzoreček* $A^4 - B^4 = (A^2 - B^2)(A^2 + B^2)$*, který pro* $A = \cos x$ *a* $B = \sin x$ *dává* $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$*, protože* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *(pro libovolné* x*). S využitím těchto vztahů můžeme upravit pravou stranu takto:*

$$\frac{4 \operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{4 \cdot \frac{\cos 2x}{2 \sin x \cos x}}{\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}} = 2 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} \cdot \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^4 x - \sin^4 x}.$$

Zde lze pokrátit zlomek výrazem $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$ *a také* $\sin x \cos x$. *Tím dostaneme výraz* $2 \sin x \cos x$, *který je roven* $\sin 2x$, *tj. pravé straně dokazované rovnosti.*

b) Předně pro x *musí být definovány hodnoty* $\operatorname{tg} x$ *a* $\operatorname{cotg} x$. *Tedy* x *nesmí být tvaru* $\frac{\pi}{2} + k\pi$, *resp.* $k\pi$, *pro* $k \in \mathbb{Z}$. *Tzn.* $x \notin \{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. *Dále potřebujeme, aby* $\operatorname{cotg}^2 x \neq \operatorname{tg}^2 x$, *tj. aby* $\cos^4 x \neq \sin^4 x$. *Tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou* $|\cos x| \neq |\sin x|$, *a tedy* $x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, *pro* $k \in \mathbb{Z}$. *Celkem* $x \notin \{k \cdot \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 8.7: Za předpokladu, že výrazy na obou stranách rovnosti dávají smysl, dokažte:

1. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} = 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x$,
2. $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x)$,
3. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$,
4. $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = \operatorname{tg} x$,
5. $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{1}{4}(3 + \cos^2 2x) \cos 2x$,
6. $\sin x \cos(y - x) + \cos x \sin(y - x) = \sin y$.

Nápověda: 1) Na pravé straně použijte $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, *upravte na společný jmenovatel a použijte vztah* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. *2) Použijte součtový vzorec pro* $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$, *upravte složený zlomek a pak porovnejte s levou stranou. 3) Použijte součtový vzorec pro* $\operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg}(x + 2x)$, *pak znova pro* $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(x + x)$ *a upravte složený zlomek. 4) Použijte vzorce pro* $\sin(2x)$ *a* $\cos(2x)$ *a také* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; *výsledný zlomek pak zjednodušte. 5) Použijte vztah* $a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$. *Přitom zde* $a^2 + b^2 = 1$ *a* $1 - a^2 b^2 = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x$. *6) Použijte součtové vzorce.*

Řešení: 1) Vztah má smysl pro $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. *2) V jisté fázi se hodí rozšířit pravou stranu zlomkem* $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}$. *Vztah má smysl pro* $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. *3) Vztah má smysl pro* $x \neq \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ *a* $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *4) Vztah má smysl pro* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *a* $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *5) Vztah má smysl pro každé* $x \in \mathbb{R}$. *6) Vztah má smysl pro každé* $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 8.8: Vypočtěte bez kalkulačky:

1. $\cos 15°$,
2. $\operatorname{tg} 75°$,
3. $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40°$,
4. $\sin 160° \cos 110° + \sin 250° \cos 340° + \operatorname{tg} 110° \operatorname{tg} 340°$,
5. $\sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$.

Nápověda: 1) $15 = 45 - 30$. *2)* $75 = 45 + 30$. *3) použijte vztah 8.4-1 pro argumenty* $20°$ *a* $40°$. *4) použijte vztahy z příkladu 8.1 na posunutí argumentů do základního intervalu. Potom součtový vzorec na součet prvních dvou členů a vzorec z 8.4-3 na třetí sčítanec. 5) použijte poslední vzorec z 8.3-3 v opačném směru.*

Řešení: 1) $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1 + \sqrt{3})$. *2)* $2 + \sqrt{3}$. *3)* $\sqrt{3}$. *4)* 0. *5)* 0.

Příklad 8.9*: Dokažte, že pro vnitřní úhly α, β, γ trojúhelníka platí:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Příklad 8.10: Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice. Vždy určete počet řešení v intervalu $[0, 2\pi)$.

1. $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$,
2. $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$,
3. $2\cos x \cos 2x = \cos x$,
4. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$,
5. $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$,
6. $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$,
7. $\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x$.

Nápověda: 1) Použijte 8.3-1). 2) Nahraďte $\sin^2 x$ *(pomocí goniometrické jedničky) výrazem* $1 - \cos^2 x$ *a řešte kvadratickou rovnici v proměnné* $y = \cos x$. *3) Po převedení na levou stranu, lze* $\cos x$ *vytknout. 4) Podělte 2 a použijte 8.2 zprava doleva. 5) Použijte 8.3-2) na levou stranu. 6) Použijte 8.3-2) zprava doleva. 7) Použijte 8.1-6) a 8.3-2).*

Řešení: Ve všech případech se řešení periodicky opakují podobně jako v předchozím případě. Lze je tedy i podobným způsobem zapsat. My zde uvedeme pouze výčet řešení v intervalu $[0, 2\pi)$.
1) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.
2) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.
3) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.
4) $\frac{\pi}{6}$.
5) $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.
6) $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.
7) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$.

Příklad 8.11: Řešte graficky v $\mathbb{R}$ následující nerovnice.

1. $\sin x > \frac{1}{2}$,
2. $\sin x < \cos x$,
3. $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$.

Řešení: Řešením je vždy sjednocení $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$. Jednotlivé množiny I_k jsou množiny řešení dané nerovnosti na intervalu $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, resp. $[(k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi]$.
1) $I_k = (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$.
2) $I_k = (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$.
3) $I_k = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi)$.

Příklad 8.12: Řešte v $\mathbb{R}$ následující nerovnice.

1. $\sin 3x < \sin x$,
2. $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$,
3. $\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$,
4. $\sin 2x + \sin x \leq 0$,
5. $1 - \cos x \leq \operatorname{tg} x - \sin x$,
6. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$,
7. $\sin 3x > 4\sin x \cos 2x$.

Nápověda: 1) Použijte 8.3-3). 2) Použijte substituci $y = \cos x$ a řešte kvadratickou nerovnici. 3) Pronásobte $\cos x$ a použijte 8.1-1). Potom lze dělit $\sin x$, ovšem pozor na znaménka při násobení a dělení. 4) Použijte 8.3-2). 5) Pravá strana je součin levé strany a $\operatorname{tg} x$. 6) Sečtěte (dle 8.3-2)) $\sin x + \sin 3x$. 7) Vyjádřit obě strany pomocí $\sin x$ (za použití 8.2, resp. 8.3-1), s přihlédnutím k 8.1-1).

Řešení: Řešením je vždy sjednocení $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ množin I_k. Jednotlivé množiny I_k jsou množiny řešení dané nerovnosti na intervalu $[2k\pi, (2k+2)\pi]$, resp. $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$.
1) $I_k = (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{6\pi}{4} + 2k\pi) \cup (\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$,
2) $I_k = [-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$,
3) $I_k = (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$,
4) $I_k = [\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \cup [\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$,
5) $I_k = (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \cup \{2k\pi\}$,
6) $I_k = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$,
7) $I_k = (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$.