M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 27. listopadu 2024.

9 Inverzní funkce (goniometrických funkcí)

Cvičení konaná 2. a 4. 12. 2024.

Příklad 9.1: Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní. Na těchto intervalech určete inverzní funkci.

1. $f(x) = x^2 + x - 6$,
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$.

Řešení: 1) $I_1 = (-\infty, -1/2]$ *a* $I_2 = [-1/2, \infty)$*; Pro* I_1 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{25}{4}}$*, s definičním oborem* $[-\frac{25}{4}, \infty]$ *a oborem hodnot* I_1*; Pro* I_2 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{25}{4}}$*, s definičním oborem* $[-\frac{25}{4}, \infty]$ *a oborem hodnot* I_2*. 2)* $I_1 = (-\infty, -6]$ *a* $I_2 = [2, \infty)$*; Pro* I_1 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x^2 + 16}$*, s definičním oborem* $[0, \infty]$ *a oborem hodnot* I_1*; Pro* I_2 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x^2 + 16}$*, s definičním oborem* $[0, \infty]$ *a oborem hodnot* I_2*.*

Příklad 9.2: Funkce arcsin je inverzní funkce k funkci sin na intervalu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Napište předpis inverzní funkce k funkci sin na intervalu

1. $[2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$,
2. $[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]$

pomocí funkce arcsin.

3 Navrhněte a řešte analogickou úlohu pro dvojice funkcí cos, arccos, resp. tg, arctg.

Řešení: 1) $\arcsin x + 2k\pi$*. 2)* $-\arcsin x + (2k+1)\pi$*.*

Příklad 9.3: Najděte maximální interval obsahující 0, na němž je funkce f monotónní. Na tomto intervalu určete inverzní funkci.

1. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$,
2. $f(x) = \sin x + \cos x$,

3. $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x$,

4. $f(x) = \log(\cos x)$,

5. $f(x) = \log(\log(x + 10))$.

Řešení: 1) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, $I = [-\pi/4, \pi/4]$, $H(f) = [-1/2, 1/2]$, *tzn.* $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arcsin 2x$ *s definičním oborem* $[-1/2, 1/2]$ *a oborem hodnot* I.
2) $f(x) = \sqrt{2}\cdot\cos(x - \pi/4)$, $I = [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$, $H(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, *tzn.* $f^{-1}(x) = -\arccos(\frac{-y}{\sqrt{2}}) + \frac{\pi}{4}$ *s definičním oborem* $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ *a oborem hodnot* I.
3) $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi/6)$, $I = [-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$, $H(f) = [-2, 2]$, *tzn.* $f^{-1}(x) = \arcsin(\frac{y}{2}) - \frac{\pi}{6}$ *s definičním oborem* $[-2, 2]$ *a oborem hodnot* I.
4) Protože funkce cos *(a tudíž i funkce* f*) nabývá v bodě* 0 *svého maxima, existují dva maximální intervaly* I_1 *a* I_2 *obsahující bod* 0, *kde je* f *monotónní:* $I_1 = (-\frac{\pi}{2}, 0]$ *a* $I_2 = [0, \frac{\pi}{2})$. *V obou případech je* $H(f) = (-\infty, 0]$. *Pro* I_1 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -\arccos(10^x)$, *s definičním oborem* $(-\infty, 0]$ *a oborem hodnot* I_1*; Pro* I_2 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = \arccos(10^x)$, *s definičním oborem* $(-\infty, 0]$ *a oborem hodnot* I_2.
5) Definiční obor funkce f *je* $(-9, \infty)$ *a obor hodnot je* $\mathbb{R}$. *Funkce je na svém definičním oboru rostoucí. Tedy* $f^{-1}(x) = 10^{10^x} - 10$ *má definiční obor* $\mathbb{R}$ *a obor hodnot* $(-9, \infty)$.

Příklad 9.4: Funkce arccos je inverzní funkce k funkci $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Pomocí této funkce vyjádřete funkci g, která je inverzní k funkci $f(x) = 3\cos 2x - 1$ uvažované na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. (Definiční obor funkce g je tedy obor hodnot funkce f, pokud zúžíme definiční obor funkce f na interval $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.)

Řešení: Pro $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ *máme* $f(x) = 3\cos 2x - 1 \in [-4, 2]$. *(Poznamenejme, že funkce je na intervalu* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ *rostoucí, a tedy funkce* g *je jako inverzní funkce k* f *dobře definována.) Proto* $g : [-4, 2] \to [\frac{\pi}{2}, \pi]$. *Pro dané* $y \in [-4, 2]$ *chceme ze vztahu* $3\cos 2x - 1 = y$ *vypočítat pro toto* y *správnou hodnotu* $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. *Dostáváme* $\cos 2x = \frac{y+1}{3}$, *kde* $\frac{y+1}{3} \in [-1, 1]$. *Pokud nyní použijeme funkci* arccos, *dostaneme hodnotu* $a = 2x = \arccos(\frac{y+1}{3}) \in [0, \pi]$. *My ale hledáme* $b = 2x \in [\pi, 2\pi]$ *s vlastností* $\cos b = \cos a$. *Takové* b *zřejmě splňuje* $b + a = 2\pi$. *Tedy* $2x = b = 2\pi - a = 2\pi - \arccos(\frac{y+1}{3})$. *Odtud* $x = \pi - \frac{1}{2}\arccos(\frac{y+1}{3})$. *(Všimněme si, že* $\frac{1}{2}\arccos(\frac{y+1}{3}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, *a proto* $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, *jak bylo požadováno.) Závěr tedy je, že funkce* $g : [-4, 2] \to [\frac{\pi}{2}, \pi]$ *je dána předpisem* $g(x) = \pi - \frac{1}{2}\arccos(\frac{x+1}{3})$.

Příklad 9.5: Následující vztahy lze použít pro výpočet $\arccos x$ a $\arctan x$ při znalosti hodnoty $\arcsin x$. Dokažte tyto vztahy.

1. Pro libovolné $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

2. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $\arctan x = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

Nápověda: 1) Použijte vztah $\cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y) = x$ *pro* $y \in [0, \pi]$. *2) Umocněte na druhou* $x = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y}$ *a nahraďte* $\cos^2 y$ *výrazem* $1 - \sin^2 y$. *Následně rovnost upravte rovnost do tvaru* $x^2 = (x^2 + 1)\sin^2 y$, *z níž lze hodnotu* $y = \arctan x$ *vypočítat pomocí funkce* $\arcsin x$.

Příklad 9.6: Určete nejmenší periodu zadané funkce:

1. $f(x) = \sin x + \cos x$,
2. $f(x) = \sin 3x$,
3. $f(x) = |\cos 2x|$,
4. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,
5. $f(x) = \sin x^2$,
6. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$.

Řešení: 1) 2π. *2)* $\frac{2\pi}{3}$. *3)* $\frac{\pi}{2}$. *4) není periodická. 5) není periodická. 6)* 2π.