M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 27. listopadu 2024.

9 Inverzní funkce (goniometrických funkcí)

Cvičení konaná 2. a 4. 12. 2024.

Příklad 9.1: Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní. Na těchto intervalech určete inverzní funkci.

1. $f(x) = x^2 + x - 6$,
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$.

Příklad 9.2: Funkce arcsin je inverzní funkce k funkci sin na intervalu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Napište předpis inverzní funkce k funkci sin na intervalu

1. $[2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$,
2. $[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]$

pomocí funkce arcsin.

3 Navrhněte a řešte analogickou úlohu pro dvojice funkcí cos, arccos, resp. tg, arctg.

Příklad 9.3: Najděte maximální interval obsahující 0, na němž je funkce f monotónní. Na tomto intervalu určete inverzní funkci.

1. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$,
2. $f(x) = \sin x + \cos x$,
3. $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x$,
4. $f(x) = \log(\cos x)$,
5. $f(x) = \log(\log(x + 10))$.

Příklad 9.4: Funkce arccos je inverzní funkce k funkci $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Pomocí této funkce vyjádřete funkci g, která je inverzní k funkci $f(x) = 3\cos 2x - 1$ uvažované na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. (Definiční obor funkce g je tedy obor hodnot funkce f, pokud zúžíme definiční obor funkce f na interval $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.)

Příklad 9.5: Následující vztahy lze použít pro výpočet $\arccos x$ a $\arctan x$ při znalosti hodnoty $\arcsin x$. Dokažte tyto vztahy.

1. Pro libovolné $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
2. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $\arctan x = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

Nápověda: 1) Použijte vztah $\cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y) = x$ *pro* $y \in [0, \pi]$. *2) Umocněte na druhou* $x = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y}$ *a nahraďte* $\cos^2 y$ *výrazem* $1 - \sin^2 y$. *Následně rovnost upravte rovnost do tvaru* $x^2 = (x^2 + 1)\sin^2 y$, *z níž lze hodnotu* $y = \arctan x$ *vypočítat pomocí funkce* $\arcsin x$.

Příklad 9.6: Určete nejmenší periodu zadané funkce:

1. $f(x) = \sin x + \cos x$,
2. $f(x) = \sin 3x$,
3. $f(x) = |\cos 2x|$,
4. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,
5. $f(x) = \sin x^2$,
6. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$.