2. cvičení z M1110 – projektivní prostory, podzim 2024

Příklad. 1. Zopakujte si definici projektivního prostoru $\mathcal{P}(V)$ s aritmetickým základem V. Co jsou přímky v projektivním prostoru?

Příklad. 2. Představme si dvourozměrný projektivní prostor $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ jako sféru S^2, kde ztotožníme protilehlé body. Jak si můžeme v tomto modelu představovat přímky? Jak je to s průniky přímek? Jak je to s průniky přímek ve třírozměrném projektivním prostoru?

Příklad. 3. Dokažte, že lineární zobrazení zadávající kolineaci je určeno jednoznačně až na násobek. Odtud plyne, že grupa kolineací projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$ je $\mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{K}) = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K})/\mathbb{K}^*$.

Příklad. 4. Popište konstrukci projektivního rozšířrní $\bar{\mathcal{A}}_2$ afinního prostoru $\mathcal{A}_2$. Co jsou vlastní a nevlastní body tohoto rozšířrní? Pokuste se tuto kontrukci popsat pro obecný afinní prostor $\mathcal{A}$. To znamená, definujte pomocí $\mathcal{A}$ vektorový prostor V s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem, v němž je $\mathcal{A}$ nadrovinou neprocházející počátkem.

Příklad. 5. Popište vztah mezi injektivními afinními zobrazeními $\varphi : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_k$ a kolineacemi $\psi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_k$ a ukažte, že grupa afinních transformací afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ je

$$\mathrm{A}(n,\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K}) \right\}.$$

Příklad. 6. Uvažujme parabolu $x_2 = (x_1)^2$ ve dvourozměrném afinním prostoru. Co je její projektivní rozšíření? Spočtěte, kde se potkávají její ramena $\{(1 : x_1 : x_1^2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0\}$ a $\{(1 : x_1 : x_1^2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \leq 0\}$.

Příklad. 7. Najděte kolineaci, která převádí dvojici přímek $p : x_1 + x_2 = 1$, $q : x_1 + x_2 = 0$ na dvojici přímek $r : y_1 = 1$, $s : y_2 = 0$. Ukažte, že tato kolineace nemůže být afinní transformací.

Příklad. 8. Najděte kolineaci, která převádí kružnici $x_1^2 + x_2^2 = 1$ na parabolu $y_1 + 4y_2^2 = 0$. Ukažte, že tato kolineace nemůže být afinní transformace.