3. cvičení z M1110 – kuželosečky a kvadriky, podzim 2024

Příklad. 1. Co je kvadrika v reálném afinním prostoru $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$? Co je kvadrika v reálném projektivním prostoru $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$? Co je rozšíření kvadriky z afinního prostoru do jeho projektivního rozšíření? Demonstrujte rozšíření na příkladech kružnice a paraboly. U projektivních rozšíření kuželoseček v těchtom příkladech, najděte jejich nevlastní body.

Kvadrika v $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$$Q = \{(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \,;\, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j + a_{00} = 0\} \quad (1)$$

kde $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{n}$ je reálná symetrická matice $\neq 0$

Kvadrika v $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^{n+1})$

$$Q = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^{n+1}) \,;\, \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0\} \quad (2)$$

kde $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{n}$ je reálná symetrická matice $\neq 0$ taková, že $A_0 = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0$.

Projektivní rozšíření kvadriky z $\mathcal{A}_n$ do $\overline{\mathcal{A}_n}$

přejdeme od rovnice (1) k rovnici (2)

Kružnice v $\mathcal{A}_2$ $\quad x_1^2 + x_2^2 = 1$

Projektivní rozšíření $\quad \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}\right) = (x_0 : x_1 : x_2)$

pro $x_0 \neq 0$

$$\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 = 1 \implies x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$$

Parabola v $\mathcal{A}_2$ $\quad x_1^2 - x_2 = 0$

Rozšíření $\quad \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - \frac{x_2}{x_0} = 0 \implies x_1^2 - x_0 x_2 = 0$

Nevlastní bod $(0 : 0 : 1)$

Příklad. 2. Je-li kvadrika v projektivním prostoru zadána $Q = \{[x] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}); f(x,x) = 0\}$, kde f je reálná symetrická forma na $\mathbb{R}^{n+1}$, pak její komplexní rozšíření je

$$Q^{\mathbb{C}} = \{[x] \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{n+1}); f(x,x) = 0\}.$$

Důvodem, proč uvažujeme komplexní rozšíření kvadrik, je skutečnost, že komplexní rozšíření jsou na rozdíl od reálných kvadrik neprázdná. Uveďte nějaký příklad.

Kvadrika $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (imaginární sféra) je v $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^3)$ ~~n~~prázdná množina, zatímco v $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}^3)$ je neprázdná.

Důvodem, proč uvažujeme komplexní rozšíření kvadrik, je, že chceme, aby kvadriky jako množiny v komplexním projektivním (resp. afinním) prostoru korespondovaly s určitými typy kvadratických forem.

Příklad. 3. Z lineární algebry II víme, že každou reálnou symetrickou bilineární formu lze psát v souřadnicích vhodné báze pomocí pomocí součtu kvadrátů s koeficienty nejdříve 1, pak -1 a nakonec 0. Takovéto bilineární formy až na násobek dávají tzv. projektivní klasifikaci kvadrik. Napište rovnice pro projektivní klasifikaci kuželoseček.

Bilineární forma $f: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

Matice v bázi $v_0, v_1, \dots v_n$ $\quad a_{ij} = f(v_i, v_j)$

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_0 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \\ \hline v_0 \dots v_j \dots v_n & \end{array} \sim \dots \sim \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \\ \hline u_0 \quad \dots \quad u_n & \end{array}$$

stejné řádk. a sloupc. úpravy

Projektivní klasifikace kuželoseček (kvadriky v P_2)

Pro každou kvadriku existuje v $\mathbb{R}^3$ báze, že v jejích homogenních souřadnicích má Q právě jednu z rovnic

$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ imaginární regulární kuželosečka

$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ reálná regulární kuželosečka

$x_0^2 + x_1^2 = 0$ dvojice imaginárních přímek

$x_0^2 - x_1^2 = 0$ dvojice reálných přímek

$x_0^2 = 0$ dvojnásobná rovina

Klasifikační rovnice jsou jednoznačně určeny signaturou kvadratické formy.

Příklad. 4. Ukažte, že platí: dvě komplexní rozšíření kuželoseček lze převést na sebe pomocí kolineace v $\mathcal{P}_2$, právě když mají stejnou klasifikační rovnici.

Uvažujme dvě kvadriky v $\mathcal{P}_n$

$Q_A = \{[x] \in \mathcal{P}_n;\ x^T A x = 0\}$ v bázi $(e_0 \dots e_n) = \mathcal{E}$

$Q_B = \{[y] \in \mathcal{P}_n;\ y^T B y = 0\}$ v téže bázi

Q_A a Q_B mají stejnou klasifikační rovnici

$\iff$ A a B mají stejnou signaturu určenou maticí

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = P^T A P \qquad D = Q^T B Q$$

$\iff$ $B = (PQ^{-1})^T A (PQ^{-1})$

$\iff$ Transformace $x = (PQ^{-1})\, y$ převádí $[y] \in Q_B$ na $[x] \in Q_A$, neboť

$$x^T A x = ((PQ^{-1})y)^T A (PQ^{-1}) y =$$

$$= y^T (PQ^{-1})^T A PQ^{-1} y = y^T B y = 0.$$

Kolineace je určena maticí PQ^{-1}.

Příklad. 5. Zopakujte si pojem polárně sdružených bodů kvadriky $Q = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j = x^T A x$ v $\mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Označení $[x] \pitchfork [y]$. Ukažte, že pokud pro $X_0 \in Q$ je

$$X_0^{\pitchfork} = \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1}); X_0 \pitchfork Y\}$$

nadrovinou, jde o tečnou nadrovinu kvadriky Q v bodě X_0.

Polárně sdružené body vzhledem ke kvadrice Q

$$Q: \quad f(x,y) = x^T A y = 0 \qquad [x] \pitchfork [y]$$

$$X_0^{\pitchfork} = \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1});\ X_0 \pitchfork Y\}$$

je nadrovina v $\mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ nebo celé $\mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1})$

$$X_0^{\pitchfork} = \{[y];\ \underbrace{x_0^T A y}_{\text{lin. forma v } y} = 0\} = \ker f(x_0, -)$$

Pokud je lin. forma nulová, je dim jádra $n+1$, pokud je nenulová, je dim jádra n.

V prvním případě se X_0 nazývá SINGULÁRNÍ BOD (leží na Q!). Kvadrika se sing. bodem se nazývá SINGULÁRNÍ ($\Leftrightarrow$ hodnost $A < n+1$), kvadrika bez sing. bodů je REGULÁRNÍ ($\Leftrightarrow$ hodnost $A = n+1$).

Ukážeme, že pro $X_0 \in Q$ regulární, je $X_0^{\pitchfork}$ tečná nadrovina.

Nechť $X(t)$ je křivka v Q taková, že $X(0) = X_0$. Pak $X'(t)$ je tečný vektor ke kvadrice Q v bodě X_0. Derivujeme rovnici podle t

$$x^T(t)\, A\, x(t) = 0.$$

Dostaneme $(x'(t))^T A\, x(t) + (x(t))^T A\, x'(t) = 0$

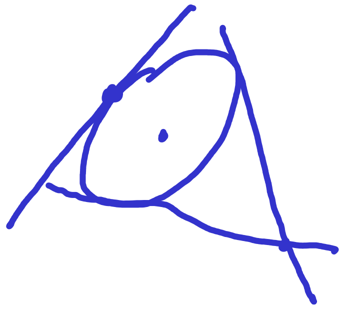
Dosazením $t=0$ $\quad 2\, x(0)^T A\, x'(0) = 0$,

X_0 a $X'(0)$ jsou polárně sdružené.

Příklad. 6. Najděte tečny kuželosečky

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 6x_2 - 3 = 0$$

procházející bodem $[3,4]$.



Rovnice v projektivním rozšíření je

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_0x_1 + 6x_0x_2 - 3x_0^2 = 0.$$

Příslušná matice je

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tečna prochází bodem $(1:3:4)$ a dotýká se kuželosečky v bodě $X = (1:x_1:x_2) \in Q$.

Tento bod je s bodem $(1:3:4)$ polárně sdružený. Řešíme proto soustavu rovnic

$$x^T A x = 0$$

$$(1,3,4) A x = 0$$

Dostáváme $6 - 3x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_1 - 6.$

Dosazením do kvadratické rovnice

$$x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0.$$

Řešení: 1) $x_1 = 3 \quad x_2 = 3$

2) $x_1 = 1 \quad x_2 = -3$

Rovnice tečen jsou

$[3,4] + t(0,-1) \qquad x_1 = 3$

$[3,4] + t(-2,-7) \qquad 7x_1 - 2x_2 = 13$

Příklad. 7. Určete tečny kuželosečky

$$4x_1 + 2x_2 - 4x_1x_2 - 4 = 0$$

rovnoběžné se směrem vektoru $n = (1, 2)$.

Rovnice kuželosečky v proj. rozšíření je

$Q: 4x_0x_1 + 2x_0x_2 - 4x_1x_2 - 4x_0^2 = 0$

Příslušná matice je

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tečna se směrovým vektorem $(1, 2)$ se dotýká kuželosečky v bodě $X = (1 : x_1 : x_2) \in Q$

Navíc tento bod je polárně sdružený s nevlastním bodem tečny $(0 : 1 : 2)$.

Tedy $(0, 1, 2)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 - 4x_1 - 2x_2 = 0$

Proto $x_2 = 2 - 2x_1$. Dosazením do rovnice kuželosečky $-8x_1^2 + 8x_1 = 0$.

Tedy $X = (1 : 0 : 2)$ nebo $(1 : 1 : 0)$

Tečny jsou

$[0, 2] + t(1, 2) \qquad 2x_1 - x_2 = -2$

$[1, 0] + t(1, 2) \qquad 2x_1 - x_2 = 2$

Příklad. 8. Určete kuželosečku procházející body $A_1 = (0:1:1)$, $A_2 = [0,1]$, $A_3 = [1,0]$, $A_4 = [1,-1]$, $A_5 = [-1,1]$.

Rovnici kuželosečky hledejme ve tvaru

$$a x_1^2 + b x_2^2 + c x_1 x_2 + d x_1 + e x_2 + f = 0$$

Matice je
$$\begin{pmatrix} f & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & a & \frac{c}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}$$

Dostáváme rovnice:

$A_1 \in Q$ $\qquad a + b + c = 0 \qquad (1)$

$A_2 \in Q$ $\qquad b + e + f = 0 \qquad (2)$

$A_3 \in Q$ $\qquad a + d + f = 0 \qquad (3)$

$A_4 \in Q$ $\qquad a + b - c + d - e + f = 0 \qquad (4)$

$A_5 \in Q$ $\qquad a + b - c - d + e + f = 0 \qquad (5)$

$(4) - (5)$ $\qquad 2d - 2e = 0 \implies d = e \qquad (6)$

z (2), (3) a (6) $\qquad a = b$

Dosazení do (1) $\qquad c = -2a$

Dosazení do (4) a (5) $\qquad f = -4a$

$\qquad d = 3a$

Řešení je $(a, a, -2a, 3a, 3a, -4a)$

Rovnice kuželosečky je

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2 - 4 = 0.$$

Příklad. 9. Střed kvadriky v afinním prostoru je bod projektivního rozšíření afinního prostoru, který je polárně sdružený se všemi nevlastními body. Je-li $Q = \{[x] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}); x^T A x = 0\}$, napište rovnice pro střed. Najděte vlastní nebo nevlastní střed kuželoseček:

(1) $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 8x_1 + 2x_2 - 1 = 0$. (vlastní střed $S = (1:2:3)$)
(2) $x_1^2 - 4x_1 + 2x_2 + 5 = 0$. (nevlastní střed $S = (0:0:1)$)

Střed $S = (s_0 : s_1 : \dots s_n)$ je polárně sdružený se všemi nevlastními body

$$(0\ 1\ 0 \dots 0)\ A \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(0\ 0\ 0 \dots 0\ 1)\ A \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = 0$$

Tedy $a_{i0} s_0 + a_{i1} s_1 + a_{i2} s_2 + \dots + a_{in} s_n = 0$

pro $i = 1, 2, \dots n$.

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ Rovnice pro vlastní střed $(1 : s_1 : s_2)$ jsou

$$s_1 - 2s_2 = 4$$
$$-2s_1 + s_2 = -1$$

Vlastní střed je $S = (1 : 2 : 3) = [2, 3]$.
Nevlastní střed neexistuje.

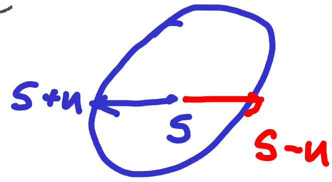
(2) $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Vlastní střed neexistuje

$$s_1 = 2$$
$$0 = -1$$

Nevlastní střed $(0 : s_1 : s_2)$: $s_1 = 0$, $0 = 0$
je $(0 : 0 : 1)$.

Příklad. 10. Ukažte, že vlastní střed S kvadriky Q podle předchozí definice má geometrickou vlastnost středu, tj. je-li $S + v \in Q$, pak rovněž $S - v \in Q$ pro nějaký vektor v ze zaměření afinního prostoru.

Nechť $Q = \{ X \in \mathcal{A}_n , \; f(x,x) = 0 \}$ a nechť $[s] = S$ je vlastní střed ~~[illegible]~~ podle předchozí definice. Nechť $u \in \operatorname{dir} \mathcal{A}_n$ je vektor takový, že



$$S + u \in Q.$$

Dokážeme, že symetrický bod $S-u$ leží rovněž na kvadrice:

$$
\begin{aligned}
f(s-u, s-u) &= f(s,s) - 2f(s,u) + f(u,u) \\
&= f(s,s) - 0 + f(u,u) \\
&= f(s,s) + 2f(s,u) + f(u,u) \\
&= f(s+u, s+u) = 0
\end{aligned}
$$

Použili jsme definici středu: je polárně sdružený se všemi nevlastními body, a tím je právě $[u]$, tedy $f(s,u) = 0$.