3. cvičení z M1110 – kuželosečky a kvadriky, podzim 2024

Příklad. 1. Co je kvadrika v reálném afinním prostoru $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$? Co je kvadrika v reálném projektivním prostoru $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$? Co je rozšíření kvadriky z afinního prostoru do jeho projektivního rozšíření? Demonstrujte rozšíření na příkladech kružnice a paraboly. U projektivních rozšíření kuželoseček v těchtom příkladech, najděte jejich nevlastní body.

Příklad. 2. Je-li kvadrika v projektivním prostoru zadána $Q = \{[x] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}); f(x,x) = 0\}$, kde f je reálná symetrická forma na $\mathbb{R}^{n+1}$, pak její komplexní rozšíření je

$$Q^{\mathbb{C}} = \{[x] \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{n+1}); f(x,x) = 0\}.$$

Důvodem, proč uvažujeme komplexní rozšíření kvadrik, je skutečnost, že komplexní rozšíření jsou na rozdíl od reálných kvadrik neprázdná. Uveďte nějaký příklad.

Příklad. 3. Z lineární algebry II víme, že každou reálnou symetrickou bilineární formu lze psát v souřadnicích vhodné báze pomocí pomocí součtu kvadrátů s koeficienty nejdříve 1, pak -1 a nakonec 0. Takovéto bilineární formy až na násobek dávají tzv. projektivní klasifikaci kvadrik. Napište rovnice pro projektivní klasifikaci kuželoseček.

Příklad. 4. Ukažte, že platí: dvě komplexní rozšíření kuželoseček lze převést na sebe pomocí kolineace v $\mathcal{P}_2$, právě když mají stejnou klasifikační rovnici.

Příklad. 5. Zopakujte si pojem polárně sdružených bodů kvadriky $Q = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j = x^TAx$ v $\mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Označení $[x] \pitchfork [y]$. Ukažte, že pokud pro $X_0 \in Q$ je

$$X_0^{\pitchfork} = \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1}); X_0 \pitchfork Y\}$$

nadrovinou, jde o tečnou nadrovinu kvadriky Q v bodě X_0.

Příklad. 6. Najděte tečny kuželosečky

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 6x_2 - 3 = 0$$

procházející bodem $[3,4]$.

Příklad. 7. Určete tečny kuželosečky

$$4x_1 + 2x_2 - 4x_1x_2 - 4 = 0$$

rovnoběžné se směrem vektoru $n = (1,2)$.

Příklad. 8. Určete kuželosečku procházející body $A_1 = (0:1:1)$, $A_2 = [0,1]$, $A_3 = [1,0]$, $A_4 = [1,-1]$, $A_5 = [-1,1]$.

Příklad. 9. Střed kvadriky v afinním prostoru je bod projektivního rozšíření afinního prostoru, který je polárně sdružený se všemi nevlastními směry. Je-li $Q = \{[x] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}); x^TAx = 0\}$, napište rovnice pro střed. Najděte vlastní nebo nevlastní střed kuželoseček:

(1) $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 8x_1 + 2x_2 - 1 = 0$. (vlastní střed $S = (1:2:3)$)
(2) $x_1^2 - 4x_1 + 2x_2 + 5 = 0$. (nevlastní střed $S = (0:0:1)$)

Příklad. 10. Ukažte, že vlastní střed S kvadriky Q podle předchozí definice má geometrickou vlastnost středu, tj. je-li $S + v \in Q$, pak rovněž $S - v \in Q$ pro nějaký vektor v ze zaměření afinního prostoru.