4. cvičení z M1110 - metrická klasifikace kvadrik, podzim 2024

Příklad. 1. Najděte afinní soustavu souřadnic, v níž má následující kuželosečka kanonickou rovnici v metrické klasifikaci.

$$3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0.$$

Řešení. Vlastní číslo $\lambda_1 = 8$ s vlastním vektorem $u_1 = \big(1/\sqrt{2}, 1\big)$ a $\lambda_2 = -2$ s vlastním vektorem $u_2 = \big(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\big)$. Střed $S = [2, -1]$, hyperbola s rovnicí $y_1^2 - \frac{y_2^2}{4} = 1$. $\square$

Příklad. 2. Najděte kanonickou rovnici kuželosečky

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 3 = 0.$$

Řešení. Vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ s vlastním vektorem $u_1 = \big(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\big)$ a $\lambda_2 = 0$ s vlastním vektorem $u_2 = \big(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\big)$. Nemá vlastní střed. Vrchol je $V = [1/40, 21/40]$, parabola s rovnicí $2y_1^2 - 5\sqrt{2}y_2 = 0$. $\square$

Příklad. 3. Najděte kanonickou rovnici kvadriky

$$x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_3 + x_3^2 + 4x_1 + 16x_2 - 4x_3 - 16 = 0.$$

Řešení. $\lambda_1 = 4$, $u_1 = \big(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\big)$ a $\lambda_2 = -2$,$u_2 = \big(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}\big)$, $\lambda_3 = -4$, $u_3 = (0, 1, 0)$. Střed je $S = [1, 2, -1]$. Jednodílný hyperboloid s rovnicí $-2y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2 + 4 = 0$. $\square$

Příklad. 4. Najděte kanonickou rovnici kvadriky

$$5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 27 = 0$$

Řešení. Nestředová. Vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 9$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$, $u_2 = \frac{1}{45}(-5, -2, 4)$, $\lambda_3 = 0$, $u_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$. Vrchol je $V = [(28/9, -37/18, 28/9]$. Rovnice $9x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_3 = 0$. $\square$

Příklad. 5. Najděte kanonickou rovnici kvadriky

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 2\sqrt{2}x_3 - 8 = 0.$$

Řešení. Nemá vlastní střed. Vlastní čísla $\lambda_1 = 2$, $u_1 = \big(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\big)$ a $\lambda_{2,3} = 0$,vlastní vektory $u = (a, a, b)$. Mezi nimi zvolíme singulární vlastní směr $u_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2})$ a k němu kolmý $u_2 = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$. Vrcholy tvoří přímku, vybereme z nich $V = [2, 2, 0]$. V bázi $V, u_1, u_2, u_3)$ je rovnice $y_1^2 + 2y_3 = 0$. Parabolická válcová plocha. $\square$