4. cvičení z M1110 - metrická klasifikace kvadrik, podzim 2024

Klasifikační věta. *Pro každou nadkvadriku Q v $\mathcal{E}_n$ lze najít takovou ortonormální bázi $(O, e_1, \ldots, e_n)$, že v jejích souřadnicích má Q právě jednu z rovnic*

(1) *pro* $n = 1, 2, 3$

- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + 1 = 0$ *dvojice imaginárních bodů/přímek/rovin*
- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - 1 = 0$ *dvojice reálných bodů/přímek/rovin*

a následující kužel

- $x_1^2 = 0$ *dvojnásobný bod/přímka/rovina*

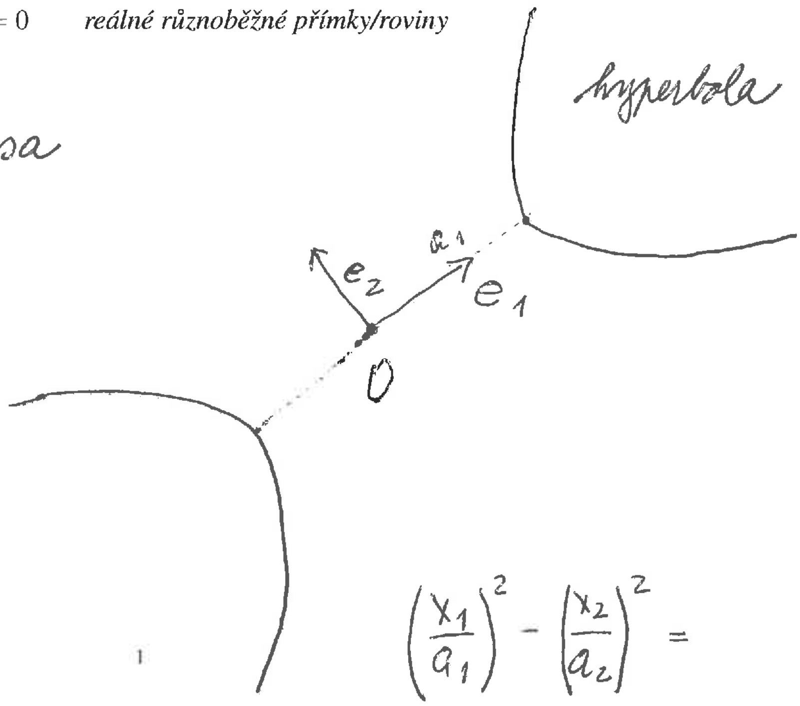
(2) *pro* $n = 2, 3$

- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 1 = 0$ *imaginární elipsa/imaginární eliptický válec*
- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 = 0$ *reálná elipsa/reálný eliptický válec*
- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 = 0$ *hyperbola/hyperbolický válec*
- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + 2x_2 = 0$ *parabola/parabolický válec*

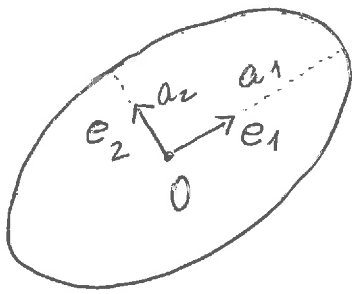
a následující kužele

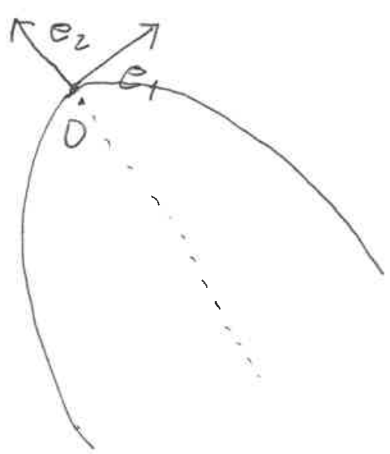
- $\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 = 0$ *imaginární různoběžné přímky/roviny*
- $\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 = 0$ *reálné různoběžné přímky/roviny*

hyperbola



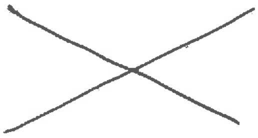
elipsa





parabola

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2}\right) = 0$$



různoběžné přímky

(3) *pro* $n = 3$

- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 + 1 = 0$ *imaginární elipsoid*
- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 - 1 = 0$ *reálný elipsoid*
- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 + 1 = 0$ *dvoudílný (nepřímkový) hyperboloid*
- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 - 1 = 0$ *jednodílný (přímkový) hyperboloid*
- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 2x_3 = 0$ *eliptický paraboloid*
- $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 2x_3 = 0$ *hyperbolický paraboloid*

a následující kužele

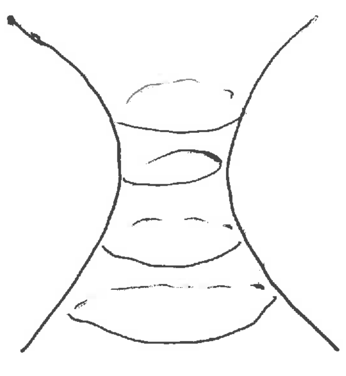
- $\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^2 = 0$ *imaginární kuželová plocha*
- $\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^2 = 0$ *reálná kuželová plocha*

Pro koeficienty platí $a_i > 0$, $\alpha_i > 0$, *přičemž koeficienty* α_i *jsou určeny až na násobek; jinými slovy, hraje roli pouze poměr* $(\alpha_1 : \cdots : \alpha_n)$.

<ins>Dvoudílný hyperboloid</ins> ... pro pevné $x_3 \in (-a_3, a_3)$ je to prázdná množina, pro $x_3 = \pm a_3$ bod, pro $|x_3| > a_3$ elipsa

<ins>Jednodílný hyperboloid</ins>

Rovnice má řešení pro každé x_3 a je to elipsa



(A)

Jak najít afinní ortonormální bázi, v níž má kvadrika kanonickou rovnici?

Kvadrika v $\mathcal{E}_3$ je zadána v ortonormální bázi (E_0, e_1, e_2, e_3) pomocí matice

$$A = \begin{array}{cccc|c} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & E_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & e_1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & e_2 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & e_3 \\ \hline E_0 & e_1 & e_2 & e_3 & \end{array} \qquad a_{ij} = f(e_i, e_j)$$

Vyznačenou podmatici 3×3 označíme A_0.

Při úpravách matice A jsou povoleny operace, které zachovávají body a převádějí ortonorm. bázi na ortonormální bázi. Tedy v A_0 můžeme provádět ortogonální diagonalizaci pomocí vlastních čísel a navzájem kolmých vlastních vektorů. K 1. řádku (k 1. sloupci) můžeme přičítat lin. kombinace ostatních řádků (sloupců) pokud mají na 1. místě 0.

POSTUP (I) Má-li kvadrika vlastní střed S vezmeme afinní bázi (S, e_1, e_2, e_3). V ní je rovnice zadána maticí

$$a_{00} = f(S,S) \qquad \begin{array}{c|ccc} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A_0 & \\ 0 & & & \end{array}$$

Matici A_0 diagonalizujeme v ortonormální bázi tvořené vlastními vektory u_1, u_2, u_3 s vl. čísly $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Nová matice je

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Odpovídající rovnice je

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + a_{00} = 0,$$

což je až na násobek kanonická rovnice.

(II) [redacted] Kvadrika nemá vlastní střed. Pokud existuje nevlastní singulární bod, vezmeme ho a příslušný jednotkový vektor označíme u_3. Vezmeme ortonormální bázi (E_0, u_1, u_2, u_3), v ní je matice kvadriky

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pracujeme o dimenzi níž. Rovnice nebude obsahovat poslední souřadnici.

c

V případě, že Q nemá singulární nevlastní bod, má A_0 právě jedno vlastní číslo rovno 0. Vezmeme bázi tvořenou vlastními vektory. V ní je

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Za počátek zvolíme tzv. vrchol. To je vlastní bod kvadriky takový, že

$$f(v,v) = 0, \quad f(v,u_1) = 0 \text{ a } f(v,u_2) = 0.$$

Pak matice formy f bude

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{v bázi } (V, u_1, u_2, u_3)$$

Příslušná rovnice je tedy

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2 p y_3 = 0$$

a půjde o eliptický nebo hyperbolický paraboloid.

Příklad. 1. Najděte afinní soustavu souřadnic, v níž má následující kuželosečka kanonickou rovnici v metrické klasifikaci.

$$3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & -1 & -7 \\ -1 & 3 & 5 \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Spočítáme vlastní střed S

$$-1 + 3s_1 + 5s_2 = 0$$
$$-7 + 5s_1 + 3s_2 = 0$$

Řešení je $S = [2, -1]$.

Vlastní čísla a vlastní vektory (hlavní směry) matice $A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Charakteristický polynom

$$(\lambda - 3)^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda - 8)(\lambda + 2)$$

$$\lambda_1 = 8 \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$$\lambda_2 = -2 \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$f(s,s) = (1, 2, -1)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -8$$

V bázi (S, u_1, u_2) je matice kvadr. formy

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Rovnice je $8y_1^2 - 2y_2^2 - 8 = 0$

Po vydělení

$$y_1^2 - \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

Příklad. 2. Najděte kanonickou rovnici kuželosečky

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 3 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rovnice pro vlastní střed $S = [s_1, s_2] = (1 : s_1 : s_2)$

$$s_1 - s_2 = 2$$
$$-s_1 + s_2 = 3$$

nemají řešení.

Najdeme vlastní čísla matice $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Charakt. polynom $(\lambda-1)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2)$

$\lambda_1 = 2 \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

$\lambda_2 = 0 \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Najdeme vrchol $V = [v_1, v_2] = (1 : v_1 : v_2)$

$f(v,v) = 0 \qquad v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2 - 4v_1 - 6v_2 + 3 = 0$

$f(u_1,v) = 0 \qquad 1 + 2v_1 - 2v_2 = 0.$

Dejte do wolframalpha.com a dostanete

$$v_1 = \frac{1}{40}, \quad v_2 = \frac{21}{40}.$$

Matice v bázi (v, u_1, u_2) je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & f(v,u_2) \\ 0 & 2 & 0 \\ f(u_2,v) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kde $f(v,u_2) = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

Rovnice je

$$2y_1^2 - 5\sqrt{2}\,y_2 = 0$$

<u>parabola</u>

Příklad. 3. Najděte kanonickou rovnici kvadriky

$$x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_3 + x_3^2 + 4x_1 + 16x_2 - 4x_3 - 16 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spočítáme střed S

$$2 + s_1 + 3s_3 = 0$$
$$8 - 4s_2 = 0$$
$$-2 + 3s_1 + s_3 = 0$$

$S = [1, 2, -1]$

Char. polynom $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

je $\left((1-\lambda)^2 - 9\right)(-\lambda - 4) = (\lambda + 2)(\lambda - 4)(-\lambda - 4)$

Vlastní čísla

$\lambda_1 = 4 \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$

$\lambda_2 = -2 \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$

$\lambda_3 = -4 \qquad u_3 = (0, 1, 0)$

$f(s, s) = 4$ Matice v afinní bázi (S, u_1, u_2, u_3)

je $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Rovnice

$$2y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2 + 2 = 0$$

Příklad. 4. Najděte kanonickou rovnici kvadriky

$$5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 27 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -27 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Výpočet pro vlastní střed

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & 8 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & -3/2 \\ -4 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -3/2 \\ 4 & -2 & -5 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -3/2 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -21/2 \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení

$$A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Charakt. polynom

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81$$

pomocí wolframalpha.com

Vlastní čísla a vektory

$\lambda_{1,2} = 9$ $\qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$

$\qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(-5, -2, 4)$

$\lambda_3 = 0$ $\qquad u_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$

Najdeme vrchol $V = (1 : v_1 : v_2 : v_3)$

$f(u_1, v) = 0 \qquad 1 + 2v_2 + v_3 = 0$

$f(u_2, v) = 0 \qquad -1 - 5v_1 - 2v_2 + 4v_3 = 0$

$f(v, v) = 0 \qquad 5v_1^2 + 8v_2^2 \dots\dots - 27 = 0$

Lze použít opět www.wolframalpha.com

$V = \left[\frac{28}{9}, -\frac{37}{18}, \frac{28}{9}\right] \qquad f(v, u_3) = 3$

4-(ii)

Matice kvadr. formy v bázi (V, u_1, u_2, u_3) je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odpovídající rovnice

$$9x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_3 = 0$$

Jedná se o eliptický paraboloid.

Příklad. 5. Najděte kanonickou rovnici kvadriky

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 2\sqrt{2}x_3 - 8 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nestředová kvadrika, soustava

$$\begin{aligned} 1 + s_1 - s_2 &= 0 \\ 1 - s_1 + s_2 &= 0 \\ -\sqrt{2} &= 0 \end{aligned}$$

nemá řešení.

Char. polynom matice $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

je $-\lambda^2(\lambda - 2)$

Vl. číslo $\lambda_1 = 2$ vlastní vektor $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$

Vl čísla $\lambda_{2,3} = 0$ vlastní vektory (a, a, b)

$\Rightarrow$ parabolický válec

$h(A) = 3$, $h(A_0) = \cancel{0}\,1$. Kvadrika musí mít nevlastní singulární bod $(0 : x_1 : x_2 : x_3)$ (řešení soustavy $A \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Je jím $(0 : 1 : 1 : -\sqrt{2})$. Vezmeme jednotkový vektor $u_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2})$, který sing. bod reprezentuje. Je to vlastní vektor k 0. K němu kolmý vl. vektor k 0 je $u_2 = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$.

5 (ii)

Zvolíme vrchol V takový, že

$$f(v,v) = 0$$
$$f(v,u_1) = 0$$
$$f(v,u_3) = 0 \quad \text{(splněno pro každé } v\text{)}$$

$f(v,u_1) = 0$ dává pro $V = [x_1, x_2, x_3]$

$$x_1 = x_2$$

$f(v,v) = 0$ po dosazení $x_1 = x_2$ dává

$$4x_1 - 8 - 2\sqrt{2}\,x_3 = 0$$

Vidíme, že vrcholy tvoří přímku. Vezmeme jeden s $x_3 = 0$: $V = [2,2,0]$

V bázi (V, u_1, u_2, u_3) je matice kvadratické formy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

neboť $f(v,u_2) = 2$

$$\frac{1}{2}(1,2,2,0)\,A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2.$$

$$2y_1^2 + 4y_2 = 0$$

$$y_1^2 + 2y_2 = 0 \qquad \text{Parabolická válcová plocha.}$$

Počítání skripta str. 42