**6. cvičení z M3110 - dualita a polyedry, podzim 2024**

**Příklad. 1.** Najděte duální bázi $\alpha^* = (f^1, f^2, f^3)$ k bázi $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$, jestliže
$$e_1 = (0,0,1)^T, \quad e_2 = (2,0,1)^T, \quad e_3 = (1,2,3)^T.$$

*Řešení.* Hledejte $f^i$ ve tvaru $f^i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$. Pak matice $A = (a_{ij})$ splňuje rovnici
$$A \cdot (e_1\ e_2\ e_3) = E.$$
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ □

**Příklad. 2.** Najděte bázi $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ v $\mathbb{R}^3$ tak, aby báze $\alpha^* = (f^1, f^2, f^3)$
$$f^1(x) = 2x_1 - x_2, \quad f^2(x) = x_2 - x_3. \quad f^3(x) = x_1 + x_2 + x_3$$
byla k ní duální.

*Řešení.* $e_1 = (2/5, -1/5, -1/5)^T$, $e_2 = (1/5, 2/5, -3/5)^T$, $e_3 = (1/5, 2/5.2/5)^T$. □

**Příklad. 3.** Najděte popis duálního zobrazení $\varphi^*$ k lineárnímu zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$, $\varphi(x) = A \cdot x$, kde $x$ jsou souřadnice vektoru standardniá báze zapsané ve sloupci.

*Řešení.* Jestliže píšeme souřadnice v duální bázi do řádku, dostáváme $\varphi^*(y) = y \cdot A$. □

**Příklad. 4.** Zopakujte si definici faktorového vektorového prostoru. Dokažte: Jestliže $V \oplus Z = U$, pak vektorový prostor $U/V$ je izomorfní s podprostrporem $Z$.

*Řešení.* Izomorphismus $\varphi : Z \to U/V$ je zadán předpisem $\varphi(z) = [z] \in U/V$. □

**Příklad. 5.** Popište všechny roviny procházející v $\mathbb{R}^3$ přímkou
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

*Řešení.* Najdeme směrový vektor přímky, $p = [(0,1,1)^T]$. K němu kolmé vektory $(b, -a, a)$ jsou normálové vektory rovin obsahujících přímku $p$. Proto všechny roviny jsou obsahující přímku $p$ jsou zadány rovnicí
$$bx_1 - ax_2 + ax_3 = 0.$$
□

**Příklad. 6.** Užitím Motzkinovy eliminace rozhodněte, zda má systém lineárních nerovností
$$\begin{aligned} x, y, z &\geq 0 \\ 4 \geq x + y + z &\geq 2 \\ 3 \geq x + y &\geq 1 \\ 2 &\geq z \end{aligned}$$
nějaké řešení. Pokud ano, najděte aspoň jedno.

*Řešení.* Provádíme postupně eliminace proměnné $x$

$$
\begin{aligned}
y, z &\geq 0 \\
4 - y - z &\geq 0 \\
3 - z &\geq 0 \\
1 + z &\geq 0 \\
2 &\geq z
\end{aligned}
$$

Eliminací $y$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
z &\geq 0 \\
4 - z &\geq 0 \\
2 &\geq z
\end{aligned}
$$

Tedy $2 \geq z \geq 0$. Volme $z = 1$ a dopočitejme $y$ a $x$. □