

7. cvičení z M3110 - lineární programování - simplexová metoda, podzim 2024

Příklad 1. V \mathbb{R}^3 najděte minimum funkce $c(x) = -2x_1 + 3x_2 - x_3$ za podmínky, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Řešení. Úlohu $\min\{c(x), Ax \leq b, x \geq 0\}$ převedeme na úlohu

$$\min\{c(x), Ax + Es = b, x \geq 0, s \geq 0\}$$

s jednotkovou maticí E tvaru 3×3 a pomocnými neznámými $s_1, s_2, s_3 \geq 0$. Simplexovou metodu začneme proto na vrcholu $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0, 10, 3, 10)$. \square

Příklad 2. Simplexovou metodou řešte nalezení minima funkce $c(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 5x_5$ za podmínek, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0.$$

Řešení. Abychom mohli najít vrchol, kde začneme simplexovou metodu, tak hledáme

$$\{\min(t_1 + t_2 + t_3); Ax + Et = b, x \geq 0, t \geq 0\}.$$

\square

Příklad 3. Simplexovou metodou řešte nalezení minima funkce $c(x) = 15x_2 + 30x_3 + 15x_5$ za podmínek, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot x \geq \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0.$$

Příklad 4. Simplexovou metodou nalezněte minimum funkce $c(x) = -x_1 - x_2$ za podmínek, že

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot x \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0.$$

Příklad 5. Firma Defekt vyrábějící jízdní kola chce naplánovat optimální měsíční výrobu. Produkuje tři typy kol: silniční, horská a zimní. Výroba je rozdělená na montáž a testování kvality, přičemž firma má k dispozici 520 hodin provozu montážní linky a 100 hodin testovací laboratoře za jeden měsíc. Pro výrobu silničního kola jsou potřeba 4 hodiny montáže, pro výrobu jednoho horského kola 5 hodin montáže a pro výrobu jednoho zimního kolka 6 hodin montáže. Pro každé kolo je potřeba 1 hodina testování. Firma chce, aby zimní kola tvořila maximálně polovinu měsíční produkce všech kol. Zisk z prodeje jednoho silničního kola je 4000 Kč, z prodeje jednoho horského kola 6000 Kč a z prodeje jednoho zimního kola 7000 Kč. Firma vždy prodá všechna vyrobená kola.

Při jakém počtu vyrobených silničních, horských a zimních kol za jeden měsíc maximalizuje firma svůj zisk? A jaký tento zisk bude? Zformulujte problém jako úlohu lineární optimalizace a úlohu vyřešte.

Řešení. Chceme maximalizovat funkci $4x_1 + 6x_2 + 7x_3$ za podmínek tvaru $Ax \leq b$ a $x \geq 0$. To je totéž jako za stejných podmínek minimalizovat funkci $c(x) = -4x_1 - 6x_2 - 7x_3$. Postupujeme jako v 1. úloze.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 520 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 0 & 120 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 4 & 0 & 400 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & -5 & 0 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & 600 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & -5 & 0 & 20 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 & 0 & 80 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 11 & 1 & 60 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 620 \end{array} \right) \end{aligned}$$

První číslo v záhlaví je kladné, proto $x_1 = 0$. Dále odečteme $x_2 = 80$, $x_3 = 20$. Zisk je 620 tisíc Kč. \square

Příklad 6. Květinářství odebírá každý týden květiny od dvou stálých dodavatelů Anny a Boba. Pro tento týden má smysl brát nejvýše jednu dodávku od Anny a jednu od Boba. Při jedné dodávce doveze Anna maximálně 50 svazků květin, přičemž nabízí dovoz růží a tulipánů. Také Bob doveze při jedné dodávce nejvýše 50 svazků květin a nabízí rovněž růže a tulipány. Květinářství může uskladnit maximálně 70 svazků růží a 60 svazků tulipánů. vedoucí ví, že prodá všechny dodané květiny. Zisk z jednoho svazku růží od Anny je 60 Kč, z jednoho svazku tulipánů od Anny 80 Kč, z jednoho svazku růží od Boba je 100 Kč a z jednoho svazku tulipánů od Boba 110 Kč.

Kolik a jakých svazků má vedoucí pro tento týden objednat, aby maximalizoval svůj zisk? A jaký tento zisk bude? Zformulujte problém jako úlohu lineární optimalizace a pak úlohu vyřešte.

Řešení. Maximální zisk je 9100 Kč pro $x_1 = 0$, $x_2 = 50$, $x_3 = 40$ a $x_4 = 10$. \square