(1a)

Dodatky ke cvičení 8 a 9 z M3110, podzim 2024

Příklad 8/5. Z univerzální vlastnosti dokažte, že ~~vektorový~~ tenzorový součin je asociativní.

Analogicky jako tenzorový součin dvou prostorů

$$U \otimes V = \mathrm{Lin}_2(U \times V, \mathbb{K})^*$$

definujeme tenzorový součin 3 prostorů (bez závorek)

$$U \otimes V \otimes W = \mathrm{Lin}_3(U \times V \times W, \mathbb{K})^*$$

a trilineární zobrazení

$$t_3 : U \times V \times W \longrightarrow \mathrm{Lin}_3(U \times V \times W, \mathbb{K})^*$$

$$(u, v, w) \longmapsto t_3(u, v, w), \quad \Phi \in \mathrm{Lin}_3(U \times V \times W, \mathbb{K})$$

$$t_3(u, v, w)\Phi = \Phi(u, v, w)$$

$$t_3 : U \times V \times W \to U \otimes V \otimes W$$

Dokážeme, že zobrazení t_3 má univerzální vlastnost

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \otimes W \arrow[r, "\exists!\varphi \text{ lineární}"] & Z \\ U \times V \times W \arrow[u, "t_3"] \arrow[ur, "\text{trilineární}"'] & \end{tikzcd}$$

Protože trilineární zobrazení do $\mathbb{K}$ jsou určena jednoznačně na trojicích (u_i, v_j, w_k), kde (u_i) je báze U, (v_j) je báze V a (w_k) je báze W, pak vektory $t(u_i, v_j, w_k)$ tvoří bázi $U \otimes V \otimes W$.

Z univerzální vlastnosti existuje právě jedno zobrazení $I : U \otimes V \otimes W \to (U \otimes V) \otimes W$

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \otimes W \arrow[r, dashed, "\exists!\, I"] & (U \otimes V) \otimes W \\ U \times V \times W \arrow[u, "t_3"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(u, v, w) \longmapsto (u \otimes v) \otimes w \quad \text{trilineární}$$

Přitom I převádí bázi $t_3(u_i, v_j, w_k)$ na vektory $(u_i \otimes v_j) \otimes w_k$, které tvoří bázi $(U \otimes V) \otimes W$. Proto je I izomorfismus.

Analogicky se najde izomorfismus

$$J : U \otimes V \otimes W \longrightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

Potom

$$J \circ I^{-1} : (U \otimes V) \otimes W \longrightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

je rovněž izomorfismus.

Příklad 9/7. Definujte zobrazení evaluace $\varepsilon : U^* \otimes U \to \mathbb{K}$ a zobrazení $\delta : \mathbb{K} \to U \otimes U^*$. Spočtěte pro ně složení

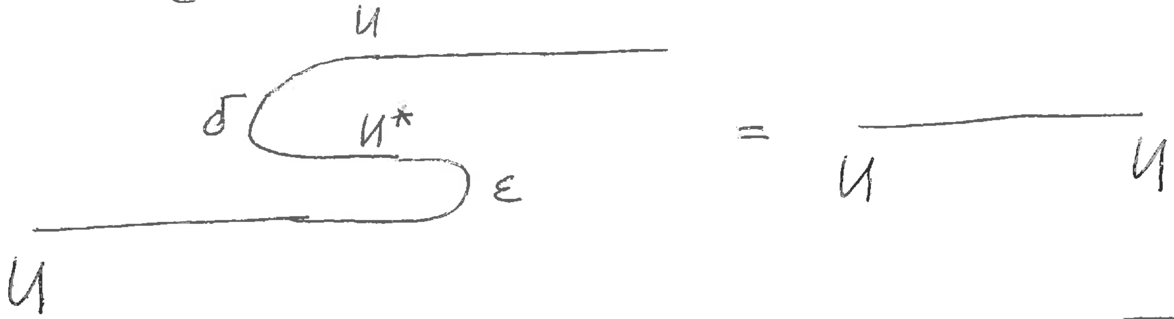
$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) : U \to U, \quad \text{a} \quad (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \delta) : U^* \to U^*.$$

Znázorněte graficky.

$$U \cong \mathbb{K} \otimes U \xrightarrow{\delta \otimes id_U} U \otimes U^* \otimes U \xrightarrow{id \otimes \varepsilon} U \otimes \mathbb{K} \cong U$$

$$u \longmapsto 1 \otimes u \longmapsto \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f^i \otimes u \longmapsto \sum_{i=1}^{n} u_i\, f^i(u) = u$$

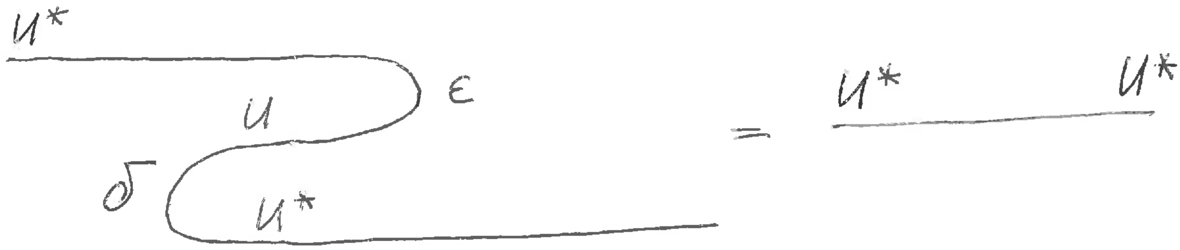
$$(id_U \otimes \varepsilon) \circ (\delta \otimes id_U) = id_U$$



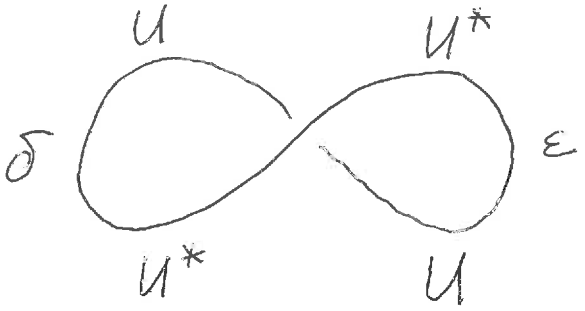
$$U^* \cong U^* \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{id_{U^*} \otimes \delta} U^* \otimes U \otimes U^* \xrightarrow{\varepsilon \otimes id_{U^*}} \mathbb{K} \otimes U^* \cong U^*$$

$$f \longmapsto f \otimes 1 \longmapsto f \otimes \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\, f^i = f$$

$$(\varepsilon \otimes id_{U^*}) \circ (id_{U^*} \otimes \delta) = id_{U^*}$$



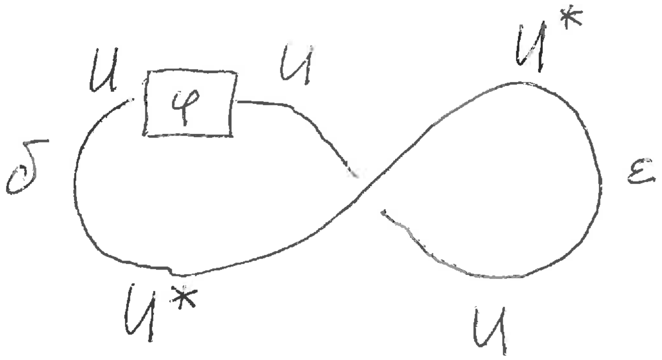
Příklad 9/navíc. Rozluštěte, co znamenají následující obrázky.



$$\mathbb{K} \xrightarrow{\delta} U \otimes U^* \xrightarrow{\tau_{12}} U^* \otimes U \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K}$$

$$1 \longmapsto \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f^i \otimes u_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f^i(u_i) = n = \dim U$$

Obrázek je násobení číslem dim U.



$$\mathbb{K} \xrightarrow{\delta} U \otimes U^* \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{id}_{U^*}} U \otimes U^* \xrightarrow{\tau_{12}} U^* \otimes U \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K}$$

$$1 \longmapsto \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \varphi(u_i) \otimes f^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f^i \otimes \varphi(u_i) \longmapsto \sum f^i(\varphi(u_i))$$

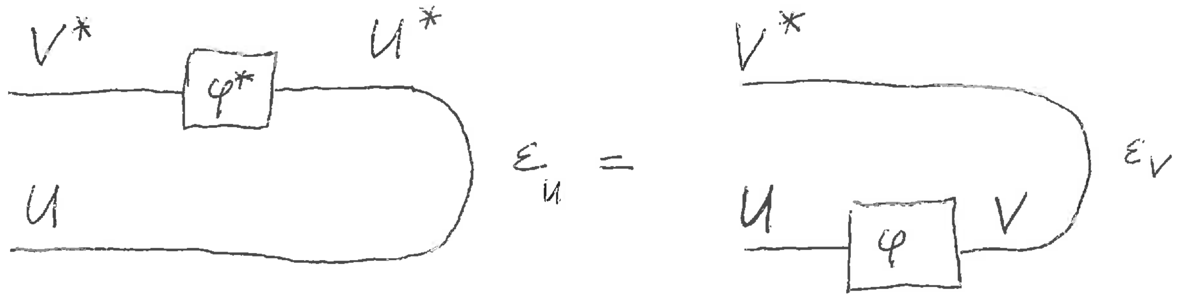
$$\varphi(u_i) = \sum_j a_i^j u_j \qquad f^i(\varphi(u_i)) = \sum_j a_i^j f^i(u_j) = a_i^i$$

Tedy $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f^i(\varphi(u_i)) = \sum_{i=1}^{n} a_i^i = \operatorname{tr} \varphi$

Příklad 9/ještě jeden. Namalujte graficky definici adjungovaného zobrazení $\varphi^* : V^* \to U^*$ k zobrazení $\varphi : U \to V$. Pro všechna $u \in U$ a $g \in V^*$ platí

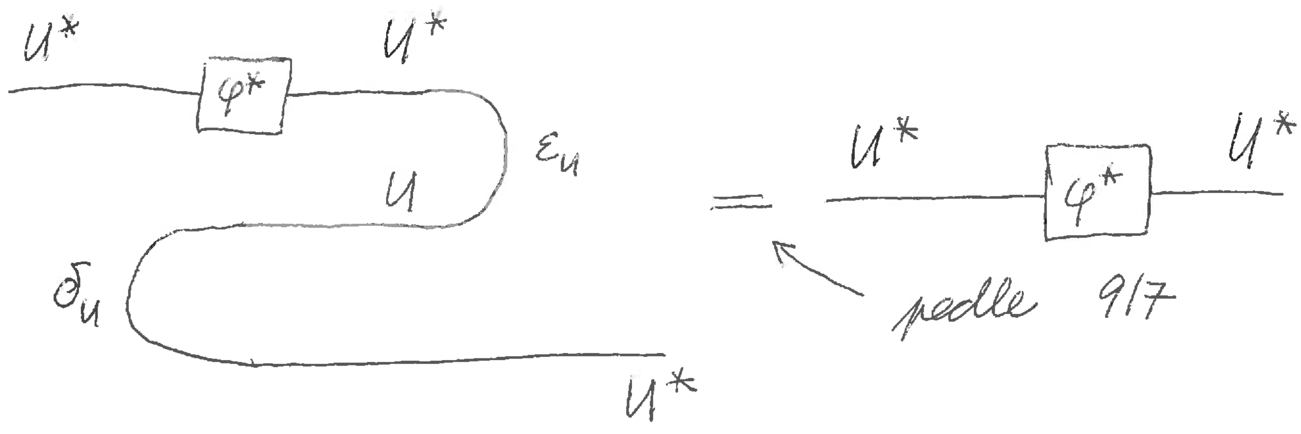
$$(\varphi^*(g))(u) = g(\varphi(u)).$$

Pomocí toho a příkladu 9/7 napište φ^* jako složené zobrazení. pro $\varphi : U \to U$.

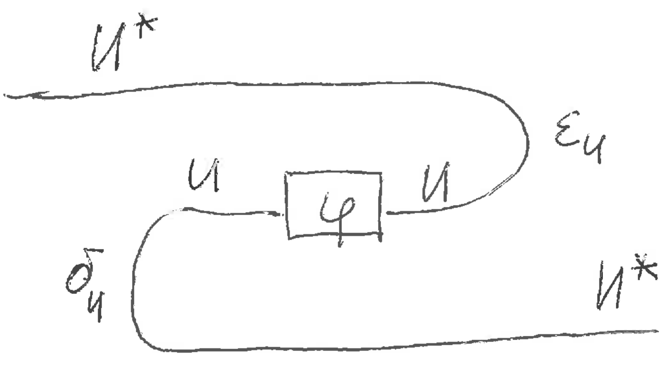


Nechť $\varphi : U \to U$, pak $\varphi^* : U^* \to U^*$

Platí



|| podle definice φ^*



Proto $\varphi^* = (\varepsilon \otimes id_{U^*}) \circ (id_{U^*} \otimes \varphi \otimes id_{U^*}) \circ (id_{U^*} \otimes \delta)$