8. cvičení z M3110 - lineární programování - tenzorový součin, podzim 2024

Příklad 1. Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$ dimenze n a p. Popište bázi vektorového prostoru bilineárních forem na $U \times V$, značíme ho $\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})$, a určete jeho dimenzi.

Řešení. Každá bilineární forma na $U \times V$ je určena svými hodnotami na dvojicích (u_i, v_j), kde u_i tvoří bázi U a v_j tvoří bázi V. Báze $\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})$ je dána bilineárními formami $f^i \odot g^j$, kde f^i je duální báze k u_i a g^j je duální báze k v_j. $\square$

Příklad 2. Definice vektorového součinu dvou vektorových prostorů konečné dimenze je

$$U \otimes V \cong \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})^*.$$

Společně s touto definicí uvažujme bilineárním zobrazením

$$t : U \times V \to U \otimes V = \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})^* : t(u, v) = u \otimes v : \Phi \mapsto \phi(u, v).$$

To má tzv. univerzální vlastnost. Zformulujte, co to znamená, a proveďte důkaz.

Příklad 3. Jestliže bilineární zobrazení $t : U \times V \to X$ a $s : U \times V \to Y$ mají obě výše uvedenou univerzální vlastnost, pak existuje izomorfismus $\varphi : X \to Y$ takový, že $\varphi \circ t = s$.

Příklad 4. Nechť U a V jsou konečně dimenzionální vektorové prostory nad $\mathbb{K}$ a nechť F je volný vektorový prostor nad množinou $U \times V$. Uvažujme vektorový podprostor R prostoru F generovaný vektory tvaru

$$a(u, v) - (au, v), a(u, v) - (u, av), (u + v, z) - (u, z) - (v, z), (u, v + z) - (u, v) - (u, z).$$

Potom faktorový vektorový prostor F/R společně s bilineárním zobrazením

$$t : U \times V \to F/R, t(u, v) = [(u, v)]$$

má univerzální vlastnost z příkladu 2 a tudíž je podle příkladu 3 izomorfní tenzorovému součinu. Zde $[(u, v)]$ je třída z F/R určená dvojicí (u, v).

Příklad 5. Z univerzální vlastnosti dokažte, že vektorový součin je komutativní a asociativní.

Příklad 6. Z univerzální vlastnosti dokažte, že pro každá dvě lineární zobrazení $\varphi : U \to X$ a $\psi : V \to Y$ existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi \otimes \psi : U \otimes V \to X \otimes Y$ takové, že $\varphi \otimes \psi(u \otimes v) = \varphi(u) \otimes \psi(v)$.