

9. cvičení z M3110 - tenzorový součin, podzim 2024

Příklad 1. Pro vektorový prostor U nad \mathbb{K} napište obě zobrazení realizující izomorfismus U a $K \otimes U$.

Příklad 2. Necht' U je vektorový prostor s bázemi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ a necht' $A = (a_j^i)_{i,j=1}^n$ je matice taková, že

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot A, \quad \text{tj.} \quad u_j = \sum_{i=1}^n v_i a_j^i.$$

Najděte matici B takovou, že pro duální báze $\alpha^* = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ a $\beta^* = (g^1, g^2, \dots, g^n)$ platí

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^n \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad f^k = \sum_{l=1}^n b_l^k g^l.$$

jaký je vztah matic A a B s maticemi přechodu $(\text{id})_{\alpha, \beta}$ a $(\text{id})_{\alpha^*, \beta^*}$?

Příklad 3. Necht' U je vektorový prostor s bazí (u_1, u_2) a duální bazí (f^1, f^2) . Vyjádřete tenzor

$$(f^1 - f^2) \otimes (u_1 + 2u_2) \in U^* \otimes U = T_1^1(U)$$

v bázi (v_1, v_2) a duální bazí (g^1, g^2) , jestliže

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Uvažujme zadání příkladu 1. Spočítejte souřadnice vektoru u v bázi β pomocí souřadnic v bázi α a matice A . Analogicky proveďte pro lineární formu f .

Příklad 5. Spočítejte souřadnici \bar{t}_{31}^{12} tenzoru $f^2 \otimes f^1 \otimes u_3 \otimes u_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes u_1 \otimes u_2 \in T_2^2(\mathbb{R}^3)$ v nové bázi

$$(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 6. Popište izomorfismus $\text{Hom}(U, V) \cong V \otimes U^*$. Ukažte, že když lineární zobrazení v souřadnicích báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ v U a $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ ve V má matici (a_j^i) , pak odpovídající tenzor $t \in V \otimes U^*$ má v bázích β a α^* souřadnice a_j^i , tj.

$$t = \sum_{ij} a_j^i v_i \otimes f^j.$$

Příklad 7. Definujte zobrazení evaluace $\varepsilon : U^* \otimes U \rightarrow \mathbb{K}$ a zobrazení $\delta : \mathbb{K} \rightarrow U \otimes U^*$.
Spočtěte pro ně složení

$$(\text{id} \otimes \varepsilon) \circ (\delta \otimes \text{id}) : U \rightarrow U, \quad \text{a} \quad (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \delta) : U^* \rightarrow U^*.$$

Znázorněte graficky.