10. cvičení z M3110 - symetrické a antisymetrické tenzory, orientovaný objem, podzim 2024

Příklad 1. Nechť e_i je báze U a f^j duální báze. Spočtěte kontrakci tenzoru

(1) $3 \cdot f^1 \otimes e_1 \otimes e_2 - 2 \cdot f^2 \otimes e_2 \otimes e_2$ podle 1. a 2. složky.

(2) $f^2 \otimes f^1 \otimes e_3 \otimes e_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes e_1 \otimes e_2$ podle druhé a čtvrté složky.

Kontrakce je definována pomocí evaluace

$$\varepsilon : U^* \otimes U \to \mathbb{K}$$

$$\varepsilon(f \otimes u) = f(u)$$

(1) Kontrakce podle 1. a 2. složky v $U^* \otimes U \otimes U$ je

$$k_{12} : U^* \otimes U \otimes U \xrightarrow{\varepsilon \otimes id_U} \mathbb{K} \otimes U \cong U$$

Proto

$$k_{12}(3 f^1 \otimes e_1 \otimes e_2 - 2 f^2 \otimes e_2 \otimes e_2) =$$

$$= 3 f^1(e_1) e_2 - 2 f^2(e_2) e_2 = e_2$$

(2) $$k_{24} \quad U^* \otimes U^* \otimes U \otimes U \xrightarrow{id_{U^*} \otimes U^* \otimes \tau_{12}} U^* \otimes U^* \otimes U \otimes U$$

$$f \otimes g \otimes u \otimes v \longmapsto f \otimes g \otimes v \otimes u$$

$$\xrightarrow{id_{U^*} \otimes \varepsilon \otimes id_U} U^* \otimes \mathbb{K} \otimes U \cong U^* \otimes U$$

$$\longmapsto f \otimes g(v) \otimes u$$

$$k_{24}(f^2 \otimes f^1 \otimes e_3 \otimes e_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes e_1 \otimes e_2)$$

$$= f^2 \otimes f^1(e_1) \otimes e_3 + f^3 \otimes f^3(e_2) \otimes e_1$$

$$= f^2 \otimes e_3$$

Příklad 2. Vypočtěte tenzorový součin různých matic.

Uvažujme lineární zobrazení

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad \psi : \overline{U} \longrightarrow \overline{V}$$

$\alpha = (u_1, \dots u_n)$ báze U, $\overline{\alpha} = (\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_p)$ báze $\overline{U}$

$\beta = (v_1, \dots, v_k)$ báze V, $\overline{\beta} = (\overline{v}_1, \dots \overline{v}_q)$ báze $\overline{V}$.

Platí
$$(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = (v_1 \dots v_k)\, A$$
$$(\psi(\overline{u}_1), \dots \psi(\overline{u}_p)) = (\overline{v}_1, \dots \overline{v}_q)\, B$$

Z definice $\varphi \otimes \psi$ plyne, že

$$(\varphi \otimes \psi)(u_i \otimes \overline{u}_j) = \varphi(u_i) \otimes \psi(\overline{u}_j) =$$
$$= \Big(\sum_s v_s a_i^s\Big) \otimes \Big(\sum_t \overline{v}_t b_j^t\Big) =$$
$$= \sum_{s,t} a_i^s b_j^t \, v_s \otimes \overline{v}_t$$

Tedy matice zobrazení $\varphi \otimes \psi$ v bázích $\alpha \otimes \overline{\alpha}$ a $\beta \otimes \overline{\beta}$ má prvky

$$a_i^s b_j^t$$

v řádku (s,t) a sloupci (i,j)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 10 \\ 6 & -8 & 15 & -20 \\ 6 & 12 & 7 & 14 \\ 18 & -24 & 21 & -28 \end{pmatrix} = C$$

$$C^{12}_{12} = a^1_1 b^2_2$$

Příklad 3. Nechť stopa čtverové matice je označena tr A. Vypočtěte $\operatorname{tr}(A\otimes B)$ pomocí tr A a tr B.

$$\mathrm{Hom}(U,U) \cong U\otimes U^*$$
$$\mathrm{Hom}(V,V) \cong V\otimes V^*$$
$$\mathrm{Hom}(U\otimes V, U\otimes V) \cong (U\otimes V)\otimes(U\otimes V)^*$$
$$\cong (U\otimes V)\otimes V^*\otimes U^*$$

$\varphi : U \to U$ s maticí $A=(a^i_j)$ v bázi $\alpha=(u_1 \dots u_n)$ odpovídá tenzoru $t = \sum_{i,j} a^i_j\, u_i \otimes f^j$

$\psi : V \to V$ s maticí $B=(b^s_t)$ v bázi $\beta=(v_1,\dots,v_k)$ odpovídá tenzoru $s = \sum_{s,t} b^s_t\, v_s \otimes g^t$

Zobrazení $\varphi\otimes\psi : U\otimes V \to U\otimes V$ odpovídá tenzoru

$$\sum_{i,s,j,t} a^i_j\, b^s_t\, u_i\otimes v_s \otimes g^t \otimes f^j$$

Duální báze k bázi $(u_i\otimes v_s)$ prostoru $U\otimes V$ je báze $(g^t\otimes f^j)$ prostoru $(U\otimes V)^* = V^*\otimes U^*$.

Stopa $\varphi\otimes\psi$ je kontrakce vzhledem k $U\otimes V$ a $(U\otimes V)^*$, proto

$$\operatorname{tr}(\varphi\otimes\psi) = \sum_{i,s,j,t} a^i_j\, b^s_t\, g^t(v_s)\, f^j(u_i)$$
$$= \sum_{i,s} a^i_i\, b^s_s = \left(\sum_i a^i_i\right)\cdot\left(\sum_s b^s_s\right)$$
$$= \operatorname{tr}\varphi \cdot \operatorname{tr}\psi = \operatorname{tr} A\cdot \operatorname{tr} B$$

Příklad 4. Symetrická mocnina. Pro vektorový prostor U dimenze n nad $\mathbb{K}$ napište definici symetrické mocniny S^qU jako kvocientu prostoru $\bigotimes^q U$. Jak pomocí báze prostoru U popíšeme bázi S^qU a jaká je dimenze S^qU? Tvrzení o dimenzi dokažte. Zformulujte univerzální vlastnost symetrické mocniny S^qU.

Nechť Σ_q je grupa všech permutací prvků $\{1, 2, \dots, q\}$. Platí

$$S^q U = \bigotimes^q U \Big/ \left[u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_q - u_{\rho(1)} \otimes u_{\rho(2)} \otimes \dots \otimes u_{\rho(q)} \text{ kde } u_i \in U \text{ a } \rho \in \Sigma_q \right]$$

Třídu ekvivalence prvku $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_q \in \bigotimes^q U$ zapisujeme $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_q$.

Je-li $u_1, u_2, \dots u_n$ báze U, pak báze S^pU je dána všemi prvky

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n}$$

takovými, že $\alpha_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = q$.

n-tici $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ lze zapsat jako posloupnost q jedniček a $n-1$ nul

$(2, 3, 0, \dots) = 110\ 1110\ 0 \dots$

Pak dimenze S^pU je $\binom{q+n-1}{q}$.

Univerzální vlastnost

$$\begin{tikzcd}
u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_q & S^pU \arrow[r, "\exists!\, \varphi \text{ lineární}"] & W \\
(u_1, u_2, \dots u_q) \arrow[u] & \underbrace{U \times U \times \dots \times U}_{q\text{-krát}} \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

symetrické q-lineární zobrazení f

Diagram komutuje.

Příklad 5. Symetrické tenzory Pomocí grupy permutací q prvků definujte symetrické tenzory v $\bigotimes^q U$. Co platí pro souřadnice symetrických tenzorů?
Definujte zobrazení symetrizace tenzoru

$$\mathrm{Sym} : \bigotimes^q U \to \bigotimes^q U.$$

V textu k přednášce (kapitola 8) je dokázáno, že obrazem tohoto zobrazení je podprostor symetrických tenzorů a že tento podprostor je izomorfní symetrické mocnině.
Spočítejte symetrizaci tenzoru $t = u_1 \otimes u_2 - 3u_4 \otimes u_1 \in \bigotimes^2 U$.

Každá permutace $\rho \in \Sigma_q$ určuje lineární zobrazení ρ_*

$$\begin{tikzcd} \bigotimes^q U \arrow[r, "\rho_*"] & \bigotimes^q U \\ U \times \dots \times U \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$(u_1, \dots u_q) \mapsto u_{\rho(1)} \otimes u_{\rho(2)} \otimes \dots \otimes u_{\rho(q)}$$

Plyne z univerzální vlastnosti

Tenzor $t \in \bigotimes^q U$ je symetrický, jestliže $\rho_* t = t$ pro všechny permutace $\rho \in \Sigma_q$

Zobrazení symetrizace je definováno takto

$$\mathrm{Sym} : \bigotimes^q U \longrightarrow \bigotimes^q U$$

$$\mathrm{Sym}(u_1 \otimes \dots \otimes u_q) = \sum_{\rho \in \Sigma_q} \frac{1}{q!} u_{\rho(1)} \otimes \dots \otimes u_{\rho(q)}$$

$$\mathrm{Sym}(u_1 \otimes u_2 - 3 u_4 \otimes u_1) = \frac{1}{2} u_1 \otimes u_2 + \frac{1}{2} u_2 \otimes u_1 - \frac{3}{2} u_4 \otimes u_1 - \frac{3}{2} u_1 \otimes u_4$$

Příklad 6. Symetrická mocnina a polynomy. V $(\mathbb{K}^n)^*$ uvažujme duální bázi ke standardní bázi v K^n. Je tvořena formami x^i, $x^i(u)$ je i-tá souřadnice vektoru u ve standardní bázi. Uvědomte si symetrická mocnina $S^q(\mathbb{K}^n)^*$ je prostor homogenních polynomů stupně q v n proměnných $x^1, x^2, \dots, x^n$.

Báze $S^q(\mathbb{K}^n)^*$ je tvořena výrazy

$$(x^1)^{\alpha_1}(x^2)^{\alpha_2}\dots(x^n)^{\alpha_n},$$

kde $\alpha_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = q$. Ta je ovšem také bází homogenních polynomů stupně q v proměnných $x^1, x^2, \dots, x^n$.

Příklad 7. Antisymetrická mocnina. Pro vektorový prostor U dimenze n nad $\mathbb{K}$ napište definici antisymetrické mocniny $\Lambda^q U$ jako kvocientu prostoru $\bigotimes^q U$. Jak pomocí báze prostoru U popíšeme bázi $\Lambda^q U$ a jaká je dimenze $\Lambda^q U$? Tvrzení o dimenzi dokažte. Zformulujte univerzální vlastnost antisymetrické mocniny $\Lambda^q U$.

Nechť Σ_q je grupa všech permutací prvků $\{1,2,\dots,q\}$. Antisymetrická mocnina je kvocient

$$\Lambda^q U = \bigotimes^q U \Big/ \left[u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_q - \operatorname{sign} \rho \; u_{\rho(1)} \otimes u_{\rho(2)} \otimes \dots \otimes u_{\rho(q)}, \text{ kde } u_i \in U \text{ a } \rho \in \Sigma_q \right]$$

Třídu ekvivalence prvku $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_q$ označujeme $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_q$.

Je-li $u_1, u_2, \dots, u_n$ báze U, pak báze $\Lambda^q U$ je dána všemi prvky

$$u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_q} \qquad 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_q \le n.$$

Takových prvků je $\binom{n}{q}$, což je dimenze $\Lambda^q U$.

Speciálně $\Lambda^q U = 0$ pro $q > \dim U$ a

$$\dim \Lambda^n U = 1.$$

<u>Univerzální vlastnost</u>

$$\begin{tikzcd}
u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_q & \Lambda^q U \arrow[rr, dashed, "\exists!\, \varphi \text{ lineární}"] & & W \\
(u_1, u_2, \dots, u_q) \arrow[u, mapsto] & \underbrace{U \times U \times \dots \times U}_{q \text{ krát}} \arrow[u] \arrow[urr, "\text{antisymetrické } q\text{-lineární zobrazení } f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Příklad 8. Antisymetrické tenzory Pomocí grupy permutací q prvků definujte antisymetrické tenzory v $\bigotimes^q U$. Co platí pro souřadnice antisymetrických tenzorů?
Definujte zobrazení antisymetrizace tenzoru

$$\mathrm{Alt} : \bigotimes^q U \to \bigotimes^q U.$$

V textu k přednášce (kapitola 8), že obrazem tohoto zobrazení je podprostor antisymetrických tenzorů a že tento podprostor je izomorfní symetrické mocnině.
Spočítejte antisymetrizaci tenzoru $t = u_1 \otimes u_2 \otimes (u_4 - 7u_1) \in \bigotimes^3 U$.

Tenzor t je antisymetrický, $t \in \otimes^q U$, jestliže pro všechny permutace $\rho \in \Sigma_q$ platí

$$\rho_* t = \operatorname{sign} \rho \cdot t.$$

Zobrazení antisymetrizace je definováno takto:

$$\mathrm{Alt} : \otimes^q U \longrightarrow \otimes^q U$$

$$\mathrm{Alt}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) = \sum_{\rho \in \Sigma_q} \frac{1}{q!} \operatorname{sign} \rho \; u_{\rho(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\rho(q)}$$

$$\mathrm{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes (u_4 - 7u_1)) = \mathrm{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes u_4) - 7\,\mathrm{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes u_1) = \frac{1}{6} u_1 \otimes u_2 \otimes u_4 - \frac{1}{6} u_2 \otimes u_1 \otimes u_4 + \frac{1}{6} u_2 \otimes u_4 \otimes u_1 - \frac{1}{6} u_4 \otimes u_2 \otimes u_1 + \frac{1}{6} u_4 \otimes u_1 \otimes u_2 - \frac{1}{6} u_1 \otimes u_4 \otimes u_2 + 7 \cdot 0$$

Příklad 9. Zopakujte si definici antisymetrická mocniny lineárního zobrazení. Uvažujte vektorový prostor U dimenze n s bází $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a lineární zobrazení $\varphi : U \to U$ s maticí $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (a^i_j)$. Spočítejte $\Lambda^n\varphi(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n)$.

Definice pomocí univerzální vlastnosti je

$$\Lambda^n\varphi(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots u_n) = \varphi(u_1) \wedge \varphi(u_2) \wedge \ldots \wedge \varphi(u_n).$$

Nechť $\big(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)\big) = (u_1, u_2, \ldots u_n)\big(a^i_j\big)$

Potom

$$\Lambda^n\varphi(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n) = \varphi(u_1) \wedge \varphi(u_2) \wedge \ldots \wedge \varphi(u_n) =$$

$$= \Big(\sum_{i_1} a^{i_1}_1 u_{i_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2} a^{i_2}_2 u_{i_2}\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{i_n} a^{i_n}_n u_{i_n}\Big)$$

$$= \sum_{\rho \in \Sigma_n} a^{\rho(1)}_1 a^{\rho(2)}_2 \ldots a^{\rho(n)}_n u_{\rho(1)} \wedge u_{\rho(2)} \wedge \ldots \wedge u_{\rho(n)}$$

$$= u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n \Big(\sum_{\rho \in \Sigma_n} \operatorname{sign} \rho \; a^{\rho(1)}_1 a^{\rho(2)}_2 \ldots a^{\rho(n)}_n\Big)$$

$$= \det A \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n$$

Použili jsme skutečnost, že když se ve výrazu

$$u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \ldots u_{i_n}$$

dva nektery opakují, je tento roven nule.

Příklad 10. Na základě předchozí úlohy dokažte, že pro čtvercové matice platí $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

$$U \xrightarrow{\psi} U \xrightarrow{\varphi} U$$

Matice ψ v dané bázi $(u_1, u_2 \ldots u_n)$ je B, matice φ je A, matice $\varphi \circ \psi$ je $A \cdot B$.

Potom podle předchozího platí

$$\Lambda^n(\varphi \circ \psi)(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n) = \det(A \cdot B)\, u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n$$

Z definice

$$\Lambda^n(\varphi \circ \psi)(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n) =$$

$$= (\varphi \circ \psi)(u_1) \wedge (\varphi \circ \psi)(u_2) \wedge \ldots \wedge (\varphi \circ \psi)(u_n)$$

$$= \Lambda^n \varphi\,(\psi(u_1) \wedge \psi(u_2) \wedge \ldots \wedge \psi(u_n)) =$$

$$= \Lambda^n \varphi\,(\Lambda^n \psi\,(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n)) =$$

$$= \Lambda^n \varphi\,(\det B \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n) =$$

$$= \det B \quad \Lambda^n \varphi\,(u_1 \wedge \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n) =$$

$$= \det B \cdot \det A \cdot (u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n)$$

Tedy $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Příklad 11. Na $\mathbb{R}^3$ uvažujme standardní skalární součin. Nechť $\mathrm{Vol} : \Lambda^3\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je objemová forma taková, že na standardní bázi je $\mathrm{Vol}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = 1$. Dokažte, že potom

(1) $\mathrm{Vol}(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) = \pm 1$ na každé ortonormální bázi.
(2) Jestliže od báze v_1, v_2, v_3 přejdeme Grammovým-Scmidtovým algoritmem k ortogonální bázi $u_1, u_2.u_3$, pak
$$\mathrm{Vol}(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \mathrm{Vol}(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3).$$
(3) Rovněž determinant Grammovy Schmidtovy matice $\langle v_i, v_j \rangle$se nezmění.
(4) $|\mathrm{Vol}(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)| = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$.

Objemová forma na $\mathbb{R}^3$ je ~~[illegible]~~ nenulová antisymetrická 3-lineární forma $\mathrm{Vol} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Ta indukuje lineární zobrazení
$$\Lambda^3 \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
Protože $\dim \Lambda^3 \mathbb{R}^3 = 1$, tak se každé dvě objemové formy liší o násobek (nenulový).

1) Protože $(u_1, u_2, u_3) = (e_1\ e_2\ e_3) P$, kde P je ortogonální matice, je
$$\mathrm{Vol}(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) = \det P\ \mathrm{Vol}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = \det P = \pm 1$$

3) Grammova matice je matice skalárního součinu (symetrické bilin. formy). Protože
$$u_1 = v_1$$
$$u_2 = v_2 - a u_1 = v_2 - a v_1$$
$$u_3 = v_3 - b u_1 - c u_2 = $$
$$= v_3 - b v_1 - c v_2 + ac v_1$$
$$= v_3 - (b + ac) v_1 - c v_2$$

Platí $(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3) P$

Proto pro matici $A = (\langle u_i, u_j \rangle)$

11 b

a matici $B = (\langle v_i, v_j \rangle)$ platí

transformační vztah

$$A = P^T B P$$

a pro determinanty

$$\det A = \det P^T \cdot \det B \cdot \det P$$
$$= \det B$$

neboť $\det P = \det P^T = 1$.

(2) $\mathrm{Vol}(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) = \det P \, \mathrm{Vol}(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$

$$= \mathrm{Vol}(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$$

(4) V ortogonální bázi u_1, u_2, u_3 platí

$$\det(\langle u_i, u_j \rangle) = \det \begin{pmatrix} \|u_1\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|u_2\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|u_3\|^2 \end{pmatrix}$$
$$= \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 \|u_3\|^2$$

Dále $(u_1, u_2, u_3) = (\tilde{u}_1 \ \tilde{u}_2 \ \tilde{u}_3) \begin{pmatrix} \|u_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|u_2\| & 0 \\ 0 & 0 & \|u_3\| \end{pmatrix}$

kde $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ je ortonormální báze. Proto

$$|\mathrm{Vol}(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3)| = \det \begin{pmatrix} \|u_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|u_2\| & 0 \\ 0 & 0 & \|u_3\| \end{pmatrix} |\mathrm{Vol}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)|$$
$$= \|u_1\| \, \|u_2\| \, \|u_3\|$$

11c

Nechť z báze v_1, v_2, v_3 dostaneme G-S ortogonalizačním procesem ortogonální bázi u_1, u_2, u_3. Z předchozího plyne

$$|Vol(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)|^2 = |Vol(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3)|^2 =$$
$$= \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 \|u_3\|^2 = \det\left(\langle u_i, u_j \rangle\right) = \det\left(\langle v_i, v_j \rangle\right)$$

A to jsme chtěli dokázat.

12 a

Příklad 12. Pomocí standardní objemové formy a skalárního součinu v $\mathbb{R}^3$ definujte vektorový součin dvou vektorů. Spočítejte $u \times v$ pro $u = (2, 1, 3)$ a $v = (3, 1, -2)$. Jaký je vztah vektoru $u \times v$ a vektorů u a v? Jaký je geometrický význam velikosti vektoru $u \times v$? Jaká je orientace trojice $u \times v, v, u$ vzhledem ke stantardní bázi?

$u \times v$ je vektor takový, že pro standardní objemovou formu ~~[illegible]~~ Vol a všechna $w \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{Vol}(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle$$

Souřadnice vektoru $u \times v$ ve standardní bázi jsou: $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$

$$a^1 = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 1 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{pmatrix} = u^2 v^3 - u^3 v^2$$

$$a^2 = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 1 \\ u^3 & v^3 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{pmatrix} = u^3 v^1 - u^1 v^3$$

$$a^3 = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix} = u^1 v^2 - u^2 v^1$$

Pro $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ je $u \times v = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$

Platí $u \times v \perp u$ neboť $\langle u \times v, u \rangle = \mathrm{Vol}(u, v, u) = 0$

$u \times v \perp v$ neboť $\langle u \times v, v \rangle = \mathrm{Vol}(u, v, v) = 0$

Dále $\|u \times v\|$ je obsah rovnoběžníku určeného vektory u a v, neboť

$$\mathrm{Vol}(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v \rangle = \|u \times v\|^2$$

12 b

Pidoře

$$Vol(u, v, u+v) = \langle u+v, u+v \rangle > 0$$

pokud u a v jsou lin. nezávislé, je orientace báze $(u, v, u+v)$ kladná. Proto je orientace báze $(u+v, v, u)$, která vznikne z předchozí báze záměnou 1. a 3. vektoru, záporná.