10. cvičení z M3110 - symetrické a antisymetrické tenzory, orientovaný objem, podzim 2024

Příklad 1. Nechť e_i je báze U a f^j duální báze. Spočtěte kontrakci tenzoru

(1) $3 \cdot f^1 \otimes e_1 \otimes e_2 - 2 \cdot f^2 \otimes e_2 \otimes e_2$ podle 1. a 2. složky.
(2) $f^2 \otimes f^1 \otimes e_3 \otimes e_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes e_1 \otimes e_2$ podle druhé a čtvrté složky.

Příklad 2. Vypočtěte tenzorový součin různých matic.

Příklad 3. Nechť stopa čtverové matice je označena $\operatorname{tr} A$. Vypočtěte $\operatorname{tr}(A \otimes B)$ pomocí $\operatorname{tr} A$ a $\operatorname{tr} B$.

Příklad 4. Symetrická mocnina. Pro vektorový prostor U dimenze n nad $\mathbb{K}$ napište definici symetrické mocniny $S^q U$ jako kvocientu prostoru $\bigotimes^q U$. Jak pomocí báze prostoru U popíšeme bázi $S^q U$ a jaká je dimenze $S^q U$? Tvrzení o dimenzi dokažte. Zformulujte univerzální vlastnost symetrické mocniny $S^q U$.

Příklad 5. Symetrické tenzory Pomocí grupy permutací q prvků definujte symetrické tenzory v $\bigotimes^q U$. Co platí pro souřadnice symetrických tenzorů?
Definujte zobrazení symetrizace tenzoru

$$\mathrm{Sym} : \bigotimes^q U \to \bigotimes^q U.$$

V textu k přednášce (kapitola 8) je dokázáno, že obrazem tohoto zobrazení je podprostor symetrických tenzorů a že tento podprostor je izomorfní symetrické mocnině.
Spočítejte symetrizaci tenzoru $t = u_1 \otimes u_2 - 3u_4 \otimes u_1 \in \bigotimes^2 U$.

Příklad 6. Symetrická mocnina a polynomy. V $(\mathbb{K}^n)^*$ uvažujme duální bázi ke standardní bázi v K^n. Je tvořena formami x^i, $x^i(u)$ je i-tá souřadnice vektoru u ve standardní bázi. Uvědomte si, že symetrická mocnina $S^q(\mathbb{K}^n)^*$ je prostor homogenních polynomů stupně q v n proměnných $x^1, x^2, \dots, x^n$.

Příklad 7. Antisymetrická mocnina. Pro vektorový prostor U dimenze n nad $\mathbb{K}$ napište definici antisymetrické mocniny $\Lambda^q U$ jako kvocientu prostoru $\bigotimes^q U$. Jak pomocí báze prostoru U popíšeme bázi $\Lambda^q U$ a jaká je dimenze $\Lambda^q U$? Tvrzení o dimenzi dokažte. Zformulujte univerzální vlastnost antisymetrické mocniny $\Lambda^q U$.

Příklad 8. Antisymetrické tenzory Pomocí grupy permutací q prvků definujte antisymetrické tenzory v $\bigotimes^q U$. Co platí pro souřadnice antisymetrických tenzorů?
Definujte zobrazení antisymetrizace tenzoru

$$\mathrm{Alt} : \bigotimes^q U \to \bigotimes^q U.$$

V textu k přednášce (kapitola 8) je dokázáno, že obrazem tohoto zobrazení je podprostor antisymetrických tenzorů a že tento podprostor je izomorfní symetrické mocnině.
Spočítejte antisymetrizaci tenzoru $t = u_1 \otimes u_2 \otimes (u_4 - 7u_1) \in \bigotimes^3 U$.

Příklad 9. Zopakujte si definici antisymetrická mocniny lineárního zobrazení. Uvažujte vektorový prostor U dimenze n s bází $u_1, u_2, \dots, u_n$ a lineární zobrazení $\varphi : U \to U$ s maticí $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (a^i_j)$. Spočítejte $\Lambda^n\varphi(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n)$.

Příklad 10. Na základě předchozí úlohy dokažte, že pro čtvercové matice platí $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Příklad 11. Na $\mathbb{R}^3$ uvažujme standardní skalární součin. Nechť $\mathrm{Vol} : \Lambda^3\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je objemová forma taková, že na standardní bázi je $\mathrm{Vol}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = 1$. Dokažte, že potom

(1) $\mathrm{Vol}(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) = \pm 1$ na každé ortonormální bázi.
(2) Jestliže od báze v_1, v_2, v_3 přejdeme Grammovým-Schmidtovým algoritmem k ortogonální bázi $u_1, u_2.u_3$, pak
$$\mathrm{Vol}(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \mathrm{Vol}(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3).$$
(3) Rovněž determinant Grammovy Schmidtovy matice $\langle v_i, v_j\rangle$ se přechodem k $\langle u_i, u_j\rangle$ nezmění.
(4) $|\,\mathrm{Vol}(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)| = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j\rangle)}$.

Příklad 12. Pomocí standardní objemové formy a skalárního součinu v $\mathbb{R}^3$ definujte vektorový součin dvou vektorů. Spočítejte $u \times v$ pro $u = (2, 1, 3)$ a $v = (3, 1, -2)$. Jaký je vztah vektoru $u \times v$ a vektorů u a v? Jaký je geometrický význam velikosti vektoru $u \times v$? Jaká je orientace trojice $u \times v, v, u$ vzhledem ke stantardní bázi, jsou-li u a v lineárně nezávislé?