

## 11. cvičení z M3110 - orientace, kvaterniony a Smithův normální tvar, podzim 2024

**Příklad 1.** Uvažujme uzavřenou lomenou čáru  $ABCD A$ , kde

$$A = [0, 1], B = [3, 3], C = [5, 0], D = [3, 5].$$

Vypočtem, nikoliv z obrázku, rozhodněte,

- (1) jaká je orientace lomené čáry,
- (2) zda uzavřená lomená čára ohraničuje čtyřúhelník,
- (3) pokud ano, zda je čtyřúhelník konvexní,
- (4) které strany čtyřúhelníka jsou vidět z počátku.

**Příklad 2.** Pomocí vektoru osy a úhlu popište složení  $S \circ R$  rotací

$$R \text{ okolo } (1, -1, 1) \text{ o úhel } +2\pi/3, \quad S \text{ okolo } (1, 1, 1) \text{ o úhel } +\pi/3.$$

**Příklad 3.** Pomocí vektoru osy a úhlu popište složení  $S \circ R$  rotací

$$R \text{ okolo } (1, 0, 1) \text{ o úhel } +\pi/2, \quad S \text{ okolo } (1, 2, 1) \text{ o úhel } +2\pi/3.$$

**Příklad 4.** Určete Smithův normální tvar celočíselné matice

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 16 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 10 \\ 8 & 6 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

*Řešení.* Smithův normální tvar je matice s diagonálními prvky 2, 2, 4, 280. □

**Příklad 5.** Abelovská grupa  $G$  je dána generátory  $g_1, g_2, g_3, g_4$  a relacemi

$$2g_1 + 4g_2 - 8g_3 - 10g_4 = 0, \quad 4g_1 + 2g_2 + 2g_3 + 4g_4 = 0.$$

Pomocí Smithova normálního tvaru najděte izomorfismus mezi  $G$  a součinem cyklických grup.

*Řešení.* Generátory grupy  $G$  jsou obrazy standardní báze  $\mathbb{Z}^4$ , relace jsou dány obrazem zobrazení  $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^4 : x \mapsto Rx$ , kde

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ -8 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Její SNT je  $PRQ = S = \text{diag}(2, 6)$ . Přitom

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1

Vezmem-li v  $\mathbb{Z}^4$  generátory  $P^{-1}e_1, P^{-1}e_2, P^{-1}e_3, P^{-1}e_4$ , dostaneme, že

$$G \cong \mathbb{Z}^4 / \text{im } R \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

□

**Příklad 6.** Pomocí SNT ukažte, že  $\mathbb{Z}/15 \cong \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5$ .

**Příklad 7.** Určete Smithův normální tvar celočíselné matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & -10 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & -8 \\ -10 & 16 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Řešení.* SNT je  $\text{diag}(2, 6, 12, 120)$ .

□