Příklady pro 8. cvičení a úlohu

(1) Spočtěte souřadnice

(a) $\bar{t}^{12}_1$ tenzoru $t \in T^2_1(\mathbb{R}^2)$, jehož souřadnice jsou v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ všechny rovny 1, v nové bázi

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) $\bar{t}^{1}_{12}$ tenzoru $t = f^1 \otimes f^2 \otimes (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \in T^1_2(\mathbb{R}^2)$ v nové bázi

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) $\bar{t}^{12}_{31}$ tenzoru $f^2 \otimes f^1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \in T^2_2(\mathbb{R}^3)$ v nové bázi

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}, \overline{\mathbf{e}_3}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $\bar{t}^{12}_{123}$ tenzoru $t \in T^2_3(\mathbb{R}^3)$ se všemi souřadnicemi rovnými dvěma v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ v nové bázi

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}, \overline{\mathbf{e}_3}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Nechť U je vektorový prostor s bazí $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a duální bází (f^1, f^2). Vyjádřete tenzor $(f^1 - f^2) \otimes (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \in T^1_1(U)$ v bázi $(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2})$ a duální bází $(\overline{f^1}, \overline{f^2})$, jestliže

$$\begin{pmatrix} \overline{f^1} \\ \overline{f^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}.$$

(3) Spočtěte kontrakci tenzoru

(a) $3 \cdot f^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - 2 \cdot f^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ podle 1. a 2. složky.

(b) $(f^1 - 2f^3 + 3f^4) \otimes (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$

(c) $(f^1 + f^2 + f^3 + f^4) \otimes \mathbf{e}_1 + (f^1 + 2f^2 + 2f^3 + 4f^4) \otimes \mathbf{e}_2 + 2(f^1 - f^2 - f^4) \otimes \mathbf{e}_3$

(d) $f^2 \otimes f^1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ podle druhých složek.

(4) Nechť $t \in T^q_p(U)$ je tenzor odpovídající lineárnímu zobrazení $\varphi : U \to U$. Ukažte, že pro dané $u \in U$ je $\varphi(u) \in U$ kontrakcí tenzoru $t \otimes u$ podle 1. a 2. složky.

(5) Stopa $\operatorname{tr} \varphi$ lineárníhon zobrazení $\varphi : U \to U$ je kontrakce tenzoru $t \in U^* \otimes U$, který odpovídá lineárnímu zobrazení φ. Spočtěte tuto stopu pomocí složek matice zobrazení φ v bázi α.