Lineární algebra III 5. 2. 2019
Jméno: ....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Celkem

1. (6 × 1 bod) Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků (+1 bod za správnou odpověď, −1 bod za špatnou odpověď, 0 bez odpovědi, výsledný počet bodů je max{součet bodů, 0}):

(a) **ano** – **ne** V 3-rozměrném projektivním prostoru existují 2 přímky, které mají prázdný průnik.

(b) **ano** – **ne** Hlavní čísla regulárních kvadrik jsou různá od 0.

(c) **ano** – **ne** Pro antisymetrické tenzory $\alpha, \beta \in \Lambda^2 U$ vždy platí $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

(d) **ano** – **ne** Na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{C}$ existuje jediná orientace.

(e) **ano** – **ne** Každý nenulový kvaternion $q \neq 0$ má inverzi q^{-1}.

(f) **ano** – **ne** Smithův normální tvar matice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 - \lambda \\ \lambda^6 & \lambda \end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda^6(\lambda^3 - \lambda) \end{pmatrix}$.

2. (6 × 2 body) Stručně a jasně odpovězte. Svá tvrzení zdůvodněte.

(a) Najděte nějakou kolineaci $\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ převádějící parabolu $x^2 + 4y = 0$ na elipsu $x^2 + y^2 = 1$, případně dokažte, že taková kolineace neexistuje.

(b) Jak je definován vrchol kuželosečky? Demonstrujte na příkladu kružnice $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

(c) Nechť α je báze prostoru U a nechť α^* je duální báze prostoru U^*. Vyjádřete souřadnice formy $\eta \in U^*$ v bázi α^* pomocí prvků báze α. Své tvrzení **dokažte**.

(d) Lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má vlastní čísla 2, 1, −1. **Odvoďte**, čemu se rovná stopa zobrazení $\varphi^{\wedge 2}\colon \Lambda^2\mathbb{R}^3 \to \Lambda^2\mathbb{R}^3$.

(e) Definujte vektorový součin, nezapomeňte uvést všechny předpoklady. Kdy je vektorový součin dvou vektorů nulový?

(f) Najděte nějakou reálnou (nebo alespoň komplexní) matici A, pro kterou Smithův normální tvar matice $(A - \lambda E)$ je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

3. (8 bodů) Najděte **metrický kanonický tvar** kvadriky

$$4 + 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 + x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$$

a **afinní ortonormální bázi**, v níž jej nabývá. Určete také všechny její **vrcholy**.

4. (3 body) Nechť V je vektorový prostor s bází $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ a duální bází $\alpha^* = (f^1, f^2, f^3)$. Tenzor $t \in T_1^2 V = V \otimes V \otimes V^*$ má v bázi α souřadnice $t_k^{ij} = 1$. Najděte jeho souřadnici $\bar{t}_2^{13}$ v bázi $\beta = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, jestliže pro duální bázi $\beta^* = (\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3)$ platí

$$\begin{pmatrix} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \\ \bar{f}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}.$$

5. (3 body) Popište pomocí osy a úhlu složení $S \circ R$ rotace R okolo vektoru $(1, 0, 1)$ o úhel $+90°$ s rotací S okolo vektoru $(1, 2, 1)$ o úhel $+120°$.

6. (4 body) Spočtěte **Smithův normální tvar** celočíselné matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & -10 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & -8 \\ -10 & 16 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

zadávající homomorfismus grup $\varphi\colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^4$. Poté **rozložte** $\mathbb{Z}^4/\operatorname{im}\varphi$ na součin cyklických grup, jejichž řády jsou mocniny prvočísel.